

United States Department of the Interior
Bureau of Reclamation
Engineering and Research Center

HYDRAULICS BRANCH
OFFICIAL FILE COPY

PLEASE RETURN PROMPTLY

Translation No. 848

SEVERAL PROBLEMS IN NONUNIFORM SEEPAGE IN THE SLOPES
OF STRUCTURES WITH VARIABLE BOUNDARY CONDITIONS

(Nekotory voprosy neustanovivsheisia fil'tratsii v otkosakh
soorushenii s peremennymi granichnymi usloviiami)

By

G. N. Konomemko

Translated from the Russian: Gidravlika i Gidrotekhnika
Sbornik No. 6, pp 88-98, 1968

By

D. L. King
Hydraulics Branch
Division of General Research

Engineering Reference Branch
Library Section
Denver, Colorado
May 1971

Translation No. 848

UNITED STATES
DEPARTMENT OF THE INTERIOR
BUREAU OF RECLAMATION
ENGINEERING AND RESEARCH CENTER

SEVERAL PROBLEMS IN NONUNIFORM SEEPAGE IN THE SLOPES
OF STRUCTURES WITH VARIABLE BOUNDARY CONDITIONS

(Nekotory voprosy neustanovivsheisia fil'tratsii v otkosakh
soorushenii s peremennymi granichnymi usloviiami)

By

G. N. Kononenko

Translated from the Russian: Gidravlika i Gidrotekhnika
Sbornik No. 6, pp 88-98, 1968

By

D. L. King
Hydraulics Branch
Division of General Research

Note: This is a working translation

Engineering Reference Branch
Denver, Colorado
May 1971

ABSTRACT

Various methods are described for calculating nonuniform seepage discharge and free-surface curves from bounded and semibounded earth structures, with water level against the structure changing linearly with time. The methods have application to problems of seepage in open pit mines, canals, trenches, cofferdams, and earth dams. Mathematical derivation based on the Boussinesq equation are presented.

DESCRIPTORS--/ *seepage/ *mathematical analysis/ phreatic lines/ canal seepage/ cofferdams/ earth dams/ groundwater flow/ boundary conditions/ hydraulic structures/ slopes/ *embankments

IDENTIFIERS--/ USSR/ Boussinesq equation

PROBLEMS IN NONUNIFORM SEEPAGE IN THE SLOPES
OF STRUCTURES WITH VARIABLE BOUNDARY CONDITIONS

By

G. I. Kononenko

At the present time in hydraulic construction and in rockwork (for open pit mining of useful materials), wide use is found of the methods of constructing ditches, cofferdams, open pits, and others using hydro-mechanical facilities. After placement of cofferdams or after soil evacuation under the foundations of structures, trenches are unwatered during which the speed of dropping the water level causes an outflow due to seepage from the stable slopes or edges of the open pits. Thus, within the body of the earth structure, a nonuniform seepage flow is formed. Such flow is observed in the body of dams during fluctuation of the upstream or downstream water level, in canals or irrigation systems, and in the slopes of diversion canals.

In seepage problems, calculations lead to determination of the quantity of the characteristic flow and also to the dynamics of the changing location of the free surface curve in earth structures. The amount of work concerning the case of seepage with boundary conditions which are a function of time is limited. Thus, in practice, various assumptions are made. So, in Reference 7 approximate calculations are given of the parameter for semibounded and bounded seepage flow with sloping boundary plane where the change in water level against the slope is assumed linear. During the investigation of Reference 1, the dynamics of

ground water were observed during filling and establishing the reservoir; the change in the water level in the reservoir in this case was approximated by a parabolic equation.

V. M. Chooeko, Reference 5, examines the nonuniform seepage for variable boundary conditions for structures with vertical boundaries (trenches, vertical-edged open pits, and others). In the given case several systems of seepage flow and homogeneous earth masses with boundary slopes on impermeable foundations are presented (Figure 1), the location of the free surface curve is determined, along with the discharge on the slope with the degree of relationship to changes in the water level on one of the boundaries.

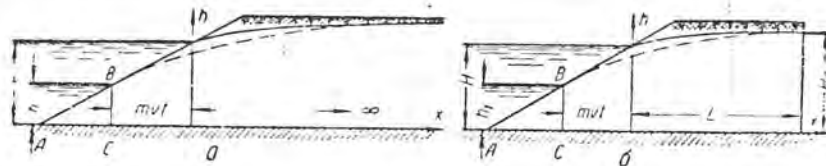


Figure 1. The computation schemes for seepage flow: a. Semibounded; b. Bounded

The general equation of nonuniform seepage is the Boussinesq equation

$$\frac{k}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial h}{\partial x} \right) = \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (1)$$

where $h(x,t)$ is the depth of flow; k is the coefficient of seepage; μ is the coefficient of soil drainage.

The solution to Equation (1) is found for the case of semibounded flow (Figure 1a) for initial conditions of $t = 0$; $h = h_0(x)$

$$h_0(x) = H^2 + \frac{2q_0}{k}x \quad (2)$$

and the boundary condition of $x = -mvt^\beta$; $\beta > 0$; $v > 0$

$$h(0, t) = H - vt^\beta. \quad (3)$$

Equation (3) corresponds to a change in the water level against the slope according to a power law.

Equation (1) is nonlinear. Linearization by the method of Bagrov-Verigin results in an equation of the thermal conductivity type

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (4)$$

where $u = h^2$; $a = \frac{kh_{sr}}{\mu}$; the value of h_{sr} is determined by recommendations given in References 1 and 7. Taking into account new boundary conditions

$$\text{with } t=0 \quad u(x, 0) = u + \frac{2q_0}{k}x; \quad (5)$$

$$\text{with } x = -mvt^\beta \quad u(0, t) = (H - vt^\beta)^2. \quad (6)$$

Let us introduce a variable

$$y = x + mvt^\beta, \quad (7)$$

then

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial u(y, t)}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u(y, t)}{\partial t}; \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \beta m \omega t^{\beta-1} \quad (8)$$

and Equation (4) takes the form

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \beta m \omega t^{\beta-1} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (9)$$

during which the boundary conditions are also changed

$$\text{with } y = 0 u(0, t) = u - 2 \sqrt{u} \omega t^{\beta} + \omega^2 t^{2\beta}; \quad (10)$$

$$\text{with } t = 0 u(x, 0) = u + \frac{2q_0}{k} x. \quad (11)$$

Let us supply a Laplace transform to Equation (9) with variable time. Let us multiply the equation term by term by $\exp(-st)dt$ and integrate with time within the limits of 0 to infinity.

By integration by parts, we obtain

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\partial u}{\partial t} e^{-st} dt &= u e^{-st} \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} u(y, t) e^{-st} dt = \\ &= -u(y, 0) + s \int_0^{\infty} u(y, t) e^{-st} dt. \end{aligned} \quad (12)$$

This leads to the form

$$U(y, s) = \int_0^{\infty} u(y, t) e^{-st} dt \quad (13)$$

and with $U(y,s)$ describing the function $u(y,t)$, then the lefthand part of the equation may be written in the following form:

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial u}{\partial t} e^{-st} dt = -u(y, 0) + sU(y, s). \quad (14)$$

After transformation of the righthand part of Equation (9) we obtain

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial u}{\partial y} e^{-st} dt = \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{\infty} u e^{-st} dt = \frac{\partial U(y, s)}{\partial y}; \quad (15)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} e^{-st} dt = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_0^{\infty} u e^{-st} dt = \frac{\partial^2 U(y, s)}{\partial y^2}. \quad (16)$$

In connection with this, the results from t vanish and only the results from y remain, the parts produced may be substituted by the usual means. Thus, in place of the differential equation in parts produced in Reference 9, we obtain the ordinary nonhomogeneous differential equation.

$$\frac{d^2 U}{dy^2} - 2\alpha \frac{dU}{dy} = \frac{1}{a} [sU - u(y, 0)], \quad (17)$$

where

$$2\alpha = \beta \frac{mv}{a} t^{\beta-1}.$$

As a result of transformation of the boundary conditions (10) and (11), allowing for Equation (13)

$$U(0, s) = \frac{u}{s} - \frac{2 \sqrt{u} v (\beta)!}{s^{\beta+1}} + \frac{v^2 (2\beta)!}{s^{2\beta+1}}; \quad (18)$$

$$U(y, 0) = \frac{u + \frac{2q_0}{k} x}{s}. \quad (19)$$

Equation (17) is linear with constant coefficients. Its characteristic equation is the equation

$$p^2 - 2\alpha p - \frac{s}{a} = 0, \quad (20)$$

the roots of which are

$$\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + \frac{s}{a}}.$$

Solution by parts of Equation (17) will be

$$u^* = Ay + B. \quad (21)$$

Having determined the constants A and B, we obtain

$$u^* = \frac{u + \frac{2q_0}{k} x}{s} - \beta \frac{2q_0}{s^2 k} m v t^{\beta-1}. \quad (22)$$

It is possible to express the general solution of Equation (17) in the following form:

$$U(y, s) = [c_1 e^{yV} + c_2 e^{-yV}] e^{\alpha y} + \frac{u + \frac{2q_0}{k} x}{s} - \beta \frac{2q_0}{s^2 k} m v t^{\beta-1}, \quad (23)$$

where

$$v = \sqrt{\alpha^2 + \frac{s}{a}}$$

For this the functions $U(y, s)$ do not become boundless with an increase in y . In Formula (23), we assign $c_1 = 0$. After this, assuming $y = 0$ and taking into account Expression (18), we obtain

$$c_2 = \frac{v^2 (2\beta)!}{s^{2\beta+1}} - \frac{2 \sqrt{u} v (\beta)!}{s^{\beta+1}} + \frac{2q_0}{sk} mvt^\beta + \beta \frac{2q_0}{s^2 k} mvt^{\beta-1}. \quad (24)$$

Thus, finally

$$U(y, s) = \frac{u + \frac{2q_0}{k} x}{s} - \beta \frac{2q_0}{s^2 k} mvt^{\beta-1} + \left[\frac{v^2 (2\beta)!}{s^{2\beta+1}} - \frac{2 \sqrt{u} v (\beta)!}{s^{\beta+1}} + \beta \frac{2q_0}{s^2 k} mvt^{\beta-1} + \frac{2q_0}{sk} mvt^\beta \right] e^{y(\alpha-v)}. \quad (25)$$

On the basis of the calculations, it was established that for $\alpha \sqrt{at} \leq 0.5$ the original of the representation

$$\frac{1}{s^n} e^{-y \sqrt{\alpha^2 + \frac{s}{a}}}$$

depends little on the value $\alpha \sqrt{at}$, in view of which it is possible to assume

$$L^{-1} \left[\frac{1}{s^n} e^{-y \sqrt{\alpha^2 + \frac{s}{a}}} \right] \approx L^{-1} \left[\frac{1}{s^n} e^{-y \sqrt{\frac{s}{a}}} \right]. \quad (26)$$

The condition $\alpha\sqrt{at} \leq 0.5$ makes it possible to substitute the simpler condition

$$m^2 \frac{\mu}{k} v \leq 1.$$

Considering that the transform $\frac{1}{s}$ corresponds to unity, and $\frac{1}{s^2}$ correspond to t , we regain by use of the Table of Transforms (References 2 and 3) the functions of $u(y,t)$ and after that the functions $h(y,t)$:

$$h^2(y,t) = H^2 + \frac{2q_0}{k} (x - mvt^\beta) + e^{\alpha y} \left\{ v^2 (2\beta)! (4t)^{2\beta} i^{4\beta} \operatorname{erfc} \frac{y}{2\sqrt{at}} - \right. \quad (27)$$

$$\left. - 2Hv(\beta)! (4t)^{\beta} i^{2\beta} \operatorname{erfc} \frac{y}{2\sqrt{at}} + \frac{2q_0}{k} mvt^\beta \left[4i^2 \operatorname{erfc} \frac{y}{2\sqrt{at}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \operatorname{erfc} \frac{y}{2\sqrt{at}} \right] \right\},$$

where

$$i^n \operatorname{erfc} u = \int_u^\infty i^{n-1} \operatorname{erfc} \xi d\xi. \quad (28)$$

Expression (28) is the integral of the error function, the general recurrent formula of which will be

$$2ni^n \operatorname{erfc} u = i^{n-2} \operatorname{erfc} u - 2ni^{n-1} \operatorname{erfc} u. \quad (29)$$

Function (28) has been tabulated with a high degree of accuracy in the investigations of Reference (3).

The unit discharge q_B on the slope of a structure is connected with the functions $U(y,s)$ by the relationship

$$\frac{q}{s} = \frac{1}{2} k \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_{y=0}. \quad (30)$$

The differential $\frac{\partial U}{\partial y}$ is found from Expression (25) and the original is determined with a Table of Transforms to be

$$\begin{aligned}
 q_B = kv^2 (2\beta)! & \left[\frac{\alpha t^{2\beta}}{2(2\beta)!} - \frac{2^{2\beta} t^{2\beta - \frac{1}{2}}}{2[1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (4\beta - 1)] \sqrt{\pi \alpha}} \right] - \\
 - kHv (\beta)! & \left[\frac{\alpha t^\beta}{(\beta)!} - \frac{2^\beta t^{\beta - \frac{1}{2}}}{[1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2\beta - 1)] \sqrt{\pi \alpha}} \right] + \\
 + 2q_0 mvt^\beta & \left[\frac{\alpha}{2} (1 + \beta) - \frac{0,565}{\sqrt{at}} \left(\frac{1}{2} + \beta \right) \right] + q_0.
 \end{aligned} \quad (31)$$

Let us examine several particular cases of changing water level through slopes:

(a) $\beta = 1$, $v = a$ constant; this corresponds to a linear law of the change of water level on the slope:

$$\begin{aligned}
 h^2(y, t) = H^2 + \frac{2q_0}{k} (x - mvt) + e^{dy} & \left[32v^2 t^2 i^4 \operatorname{erfc} \frac{y}{2\sqrt{at}} - \right. \\
 - 8Hv t i^2 \operatorname{erfc} \frac{y}{2\sqrt{at}} + \frac{2q_0}{k} mvt & \left(4i^2 \operatorname{erfc} \frac{y}{2\sqrt{at}} + \operatorname{erfc} \frac{y}{2\sqrt{at}} \right) \Big],
 \end{aligned} \quad (32)$$

with the discharge

$$\begin{aligned}
 q_B = k \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{0,755}{\sqrt{at}} \right) v^2 t^2 - k \left(\alpha - \frac{1,13}{\sqrt{at}} \right) Hvt + \\
 + \left(\alpha - \frac{0,847}{\sqrt{at}} \right) 2q_0 mvt + q_0.
 \end{aligned} \quad (33)$$

Equation (33) can be written in another form:

$$q_B = q_0 + kH\bar{q}_1, \quad (34)$$

where q_B is the discharge of the flow at its outflow on the slope; q_0 is the initial steady-state discharge, the sign of which is selected to be positive if it is directed towards the slope and negative for the reverse direction; $\bar{q}_1$ is the relative discharge on the slope with a drop in the water level through the slope.

To determine $\bar{q}_1$, graphs are constructed (Figure 2) to show the relationship of the discharge to the drop in water level through the slope, $\delta = \frac{h_1}{H}$ the magnitude of $i = \frac{\mu}{\kappa} v$, which is the product of the characteristics of the soil and the velocity of lowering the free surface.

(b) $\beta = 1$, $v = a$ constant, $q_0 = 0$, and $H = h_0$ (initially the thickness of the groundwater); in this case the water level in the slope is

$$h^2(y, t) = h_0^2 + e^{\alpha y} \left[32\alpha^2 i^2 \operatorname{erfc} \frac{y}{2\sqrt{at}} - 8h_0 v t i^2 \operatorname{erfc} \frac{y}{2\sqrt{at}} \right], \quad (35)$$

With the discharge

$$q_B = k \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{0,755}{\sqrt{at}} \right) v^2 t^2 - k \left(\alpha - \frac{1,13}{\sqrt{at}} \right) h_0 v t. \quad (36)$$

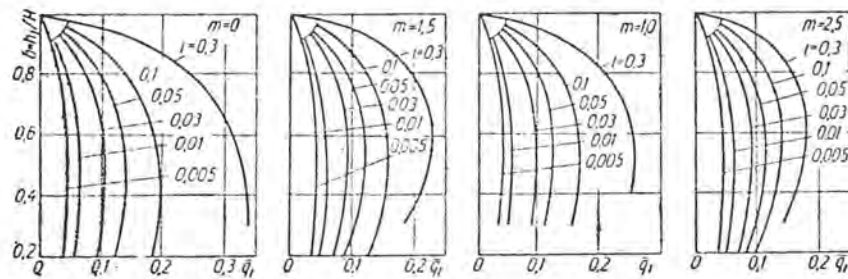


Figure 2. Graphs for determining $r \frac{3}{q_1}$

Let us examine the limiting flow with a given constant head on the external boundary. The design scheme for this case is shown on Figure 1b. Let us assume that on the boundary $y = L_t$. The depth of flow remains constant and equal to H_0 . Then the function $U(y, s)$ should satisfy Equation (17), the solution of which appears in Equation (23), and also the condition on the boundary $y = L_t$, which, taking into account designation (13), can be expressed in the following manner:

$$U(L, s) = \frac{u_0}{s}. \quad (37)$$

Let us assume Equation (19) for the initial condition in which the coordinate y changes from 0 to L_t . In this case, the solution of Equation (17) has the form

$$U(y, s) = [A \operatorname{ch} y v + B \operatorname{sh} y v] e^{\alpha y} + \frac{u + \frac{2q_0}{k} x}{s} - \beta \frac{2q_0}{s^2 k} m v^{\beta-1}, \quad (38)$$

where A and B are arbitrary constants.

Assuming in Equation (38)

$$y=0, \quad U = \frac{u}{s} - \frac{2 \sqrt{u} v (\beta)!}{s^{\beta+1}} + \frac{\tau^2 (2\beta)!}{s^{2\beta+1}}, \quad y = L_t, \quad u = \frac{u_0}{s},$$

we obtain

$$A = \frac{2q_0}{sk} mvt^\beta + \beta \frac{2q_0}{s^2k} mvt^{\beta-1} - \frac{2\sqrt{u}v(\beta)!}{s^{\beta+1}} + \frac{v^2(2\beta)!}{s^{2\beta+1}}; \quad (39)$$

$$B = \frac{\left(\beta \frac{2q_0}{s^2k} mvt^{\beta-1} - u - u_0 + \frac{2q_0}{k} L\right) e^{-\alpha L_t}}{\text{sh } L_t v} \quad (40)$$

$$- \frac{\left[\frac{2q_0}{sk} mvt^\beta + \beta \frac{2q_0}{s^2k} mvt^{\beta-1} - \frac{2\sqrt{u}v(\beta)!}{s^{\beta+1}} + \frac{v^2(2\beta)!}{s^{2\beta+1}}\right] \text{ch } L_t v}{\text{sh } L_t v}.$$

Substituting the quantities A and B, Equation (38), after the corresponding transformation, we get

$$\begin{aligned} U(y, s) = & e^{\alpha y} \left[\frac{2q_0}{sk} mvt^\beta + \beta \frac{2q_0}{s^2k} mvt^{\beta-1} - \frac{2\sqrt{u}v(\beta)!}{s^{\beta+1}} + \frac{v^2(2\beta)!}{s^{2\beta+1}} \right] \times \\ & \times \frac{\text{sh}(L_t - y)v}{\text{sh } L_t v} + e^{-\alpha(L_t - y)} \left[\beta \frac{2q_0}{s^2k} mvt^{\beta-1} - \frac{u - u_0 + \frac{2q_0}{k} L}{s} \right] \times \\ & \times \frac{\text{sh } yv}{\text{ch } L_t v} + \frac{u + \frac{2q_0}{k} x}{s} - \beta \frac{2q_0}{s^2k} mvt^{\beta-1}. \end{aligned} \quad (41)$$

To obtain the value of the function $h(y, t)$ from the relationship (41), we carry out several simplifications for small values of time t . In order to get to the original function $h(y, t)$ in the expression for representation (41), the ratio of the hyperbolic sines can be easily presented in the following form:

$$\begin{aligned} \frac{\text{sh } yv}{\text{sh } Lv} &= \frac{e^{yv}(1 - e^{-2yv})}{e^{Lv}(1 - e^{-2yv})} = e^{-(L-y)v} [1 + e^{-2Lv} + \dots - e^{-2yv} - \\ &- e^{-2(y+L)v} + \dots] = e^{-(L-y)v} - e^{-(L+y)v} + e^{-(3L-y)v} - \\ &- e^{-(3L+y)v} + \dots; \end{aligned} \quad (42)$$

$$\frac{\operatorname{sh}(L-y)v}{\operatorname{sh}Lv} = e^{-yv} \frac{1 - e^{-2(L-y)v}}{1 - e^{-2Lv}} = e^{-yv} [1 + e^{-2Lv} + \dots - e^{-2(L-y)v} - e^{-2(2L-y)v} - \dots] = e^{-yv} + e^{-(2L+y)v} - e^{-2Lv} - \dots \quad (43)$$

Maintaining in Expressions (42) and (43) only the first terms of the series, let us rewrite Equality (41) in the form

$$U(y, s) = e^{\alpha y} \left[\frac{2q_0}{sk} mvt^\beta + \beta \frac{2q_0}{s^2k} mvt^{\beta-1} - \frac{2\sqrt{u}v(\beta)!}{s^{\beta+1}} + \frac{v^2(2\beta)!}{s^{2\beta+1}} \right] e^{-yv} + \\ + e^{-\alpha(L_t-y)} \left[\beta \frac{2q_0}{s^2k} mvt^{\beta-1} - \frac{u - u_0 + \frac{2q_0}{k}L}{s} \right] e^{-(L_t-y)v} + \\ + \frac{u + \frac{2q_0}{k}x}{s} - \beta \frac{2q_0}{s^2k} mvt^{\beta-1}. \quad (44)$$

Using Relationship (26), let us proceed using the Table of Transforms to the function $U(y, t)$, and after that to the function $h(y, t)$. As a result, we finally obtain for small values of time t

$$h^2(y, t) = H^2 + \frac{2q_0}{k} (x - mvt^\beta) + e^{\alpha y} \left\{ v^2(2\beta)! (4t)^{2\beta} i^{4\beta} \times \right. \\ \times \operatorname{erfc} \frac{y}{2\sqrt{at}} - 2Hv(\beta)! (4t)^{\beta} i^{2\beta} \operatorname{erfc} \frac{y}{2\sqrt{at}} + \frac{2q_0}{k} mvt^\beta \times \\ \times \left(4i^2 \operatorname{erfc} \frac{y}{2\sqrt{at}} + \operatorname{erfc} \frac{y}{2\sqrt{at}} \right) \left. \right\} + e^{-\alpha(L_t-y)} \left\{ \frac{8q_0}{k} mvt^{\beta} i^2 \times \right. \\ \times \operatorname{erfc} \frac{L_t-y}{2\sqrt{at}} - \left(H^2 - H_0^2 + \frac{2q_0}{k}L \right) \operatorname{erfc} \frac{L_t-y}{2\sqrt{at}} \left. \right\}. \quad (45)$$

Let us obtain the transformed expression for the discharge, starting with ratio (30), taking into account the transition to the original:

$$\begin{aligned}
 q_B = kv^2 (2\beta)! & \left[\frac{\alpha t^{2\beta}}{2 (2\beta)!} - \frac{2^{2\beta} t^{2\beta - \frac{1}{2}}}{2 [1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (4\beta - 1)] \sqrt{\pi \alpha}} \right] - \\
 - kHv (\beta)! & \left[\frac{\alpha t^\beta}{(\beta)!} - \frac{2^\beta t^{\beta - \frac{1}{2}}}{[1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2\beta - 1)] \sqrt{\pi \alpha}} \right] + \\
 + ke^{-\alpha L_t} & \left[\beta \frac{2q_0}{k} mvt^{\beta-1} \left(2\alpha i^2 \operatorname{erfc} \frac{L_t}{2\sqrt{at}} + \sqrt{t} i \operatorname{erfc} \frac{L_t}{2\sqrt{at}} \right) - \right. \\
 - \left(H^2 - H_0^2 + \frac{2q_0}{k} L \right) & \left(\frac{\alpha}{2} \operatorname{erfc} \frac{L_t}{2\sqrt{at}} + \frac{0.28}{\sqrt{at}} e^{-\frac{L_t^2}{4at}} \right) \right] + \\
 + 2q_0 mvt^\beta & \left[\frac{\alpha}{2} (1 + \beta) - \frac{0.565}{\sqrt{at}} \left(\frac{1}{2} + \beta \right) \right] + q_0.
 \end{aligned} \quad (46)$$

Let us examine particular cases of a change in water level through the slope:

(a) $\beta = 1$, $v = a$ constant; this corresponds to a linear law of changing water level through the slope:

$$\begin{aligned}
 h^2(y, t) = H^2 + \frac{2q_0}{k} (x - mvt) + e^{\alpha y} & \left[32\alpha^2 t^2 i^4 \operatorname{erfc} \frac{y}{2\sqrt{at}} - \right. \\
 - 8Hvt i^2 \operatorname{erfc} \frac{y}{2\sqrt{at}} + \frac{2q_0}{k} mvt & \left(4i^2 \operatorname{erfc} \frac{y}{2\sqrt{at}} + \operatorname{erfc} \frac{y}{2\sqrt{at}} \right) \right] + \\
 + e^{-\alpha (L_t - y)} & \left[\frac{8q_0}{k} mvt i^2 \operatorname{erfc} \frac{L_t - y}{2\sqrt{at}} - \left(H^2 - H_0^2 + \frac{2q_0}{k} L \right) \operatorname{erfc} \frac{L_t - y}{2\sqrt{at}} \right].
 \end{aligned} \quad (47)$$

With the discharge

$$\begin{aligned}
 q_B = k \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{0.755}{\sqrt{at}} \right) & v^2 t^2 - k \left(\alpha - \frac{1.13}{\sqrt{at}} \right) Hvt + ke^{-\alpha L_t} \times \\
 \times \left[\frac{2q_0}{k} mv \left(2\alpha i^2 \operatorname{erfc} \frac{L_t}{2\sqrt{at}} + \sqrt{t} i \operatorname{erfc} \frac{L_t}{2\sqrt{at}} \right) - \right. & \left(H^2 - H_0^2 + \frac{2q_0}{k} L \right) \times \\
 \times \left(\frac{\alpha}{2} \operatorname{erfc} \frac{L_t}{2\sqrt{at}} + \frac{0.28}{\sqrt{at}} e^{-\frac{L_t^2}{4at}} \right) & \left. + 2q_0 mvt \left(\alpha - \frac{0.847}{\sqrt{at}} \right) + q_0 \right]
 \end{aligned} \quad (48)$$

(b) $\beta = 1$, $v = \text{constant}$; $q_0 = 0$; $H = H_0 = h_0$; in this case

$$h^2(y, t) = h_0^2 + e^{\alpha y} \left[32v^2 t^2 i^4 \operatorname{erfc} \frac{y}{2\sqrt{at}} - 8h_0 v t i^2 \operatorname{erfc} \frac{y}{2\sqrt{at}} \right], \quad (49)$$

With the discharge

$$q_b = k \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{0,755}{\sqrt{at}} \right) v^2 t^2 - k \left(\alpha - \frac{1,13}{\sqrt{at}} \right) h_0 v t. \quad (50)$$

From Equations (49) and (50), it is seen that for small values of time t the effect of a more distant boundary on the seepage process is not seen, and in this case the formulas for semi-bounded and bounded flow coincide.

The formulas given above were obtained without calculating the resistance of the outflow wedge ABC (Figure 1). On the basis of this study of the movement of water in the outflow wedge, it is possible to establish the connection between the discharge occurring along the wedge and the magnitude of the seepage.

Recommendations for determining the seepage depth h_b in

References 4, 6, and 8.

Below is given an example of calculation for a dam with a top drain with a falling water surface in the reservoir. Calculation of the seepage proceeds according to a simplified method found in Reference 7. According to this method, a fictitious slope is constructed with a slope m' , determined according to the formula

$$m' = \frac{m^2}{m + 0,5}, \quad (51)$$

with computations according to the formulas and equations, derived without taking into account the seepage part. The point of seepage is located at the point of the intersection of the free surface curve with the line of the actual flow.

The computation schematic for the dam is shown in Figure 3. The level of the upper pool dropped in a period of 15 days with a constant velocity $v = 0.6$ m/day, the level on the downstream face was constant. The seepage properties of the soil were characterized by the relationship $\frac{k}{\mu} = 10$ m/day.

Let us determine the parameters of the steady-state flow

$$m' = \frac{3^2}{3,5} = 2,57 \text{ m} \quad \Delta L = \frac{H}{2 + \frac{1}{m}} = \frac{22}{2 + \frac{1}{3}} = 9,5 \text{ m}.$$

The given discharge

$$\bar{q}_0 = \frac{q_0}{k} = - \frac{H^2 - H_0^2}{2(L + \Delta L)} = \frac{22^2 - 4^2}{2 \cdot 69} = -3,4 \text{ m}.$$

The parameters for unsteady flow will be

$$\begin{aligned} h_{cp} &= \frac{H + h_1}{2} = \frac{22 + 13}{2} = 17,5 \text{ m}; \quad a = \frac{k}{\mu} h_{cp} = 10 \cdot 17,5 = 175 \text{ m}; \\ \sqrt{at} &= \sqrt{175 \cdot 15} = 51,5 \text{ m}; \quad m'vt = 2,57 \cdot 0,6 \cdot 15 = 23,1 \text{ m}; \\ \alpha &= \frac{m'v}{2a} = \frac{2,57 \cdot 0,6}{350} = 0,0044; \quad L_t = L + m'vt = 69 + 23,1 = 92,1 \text{ m}. \end{aligned}$$

The free surface curves are calculated according to Equation (47), represented graphically in Figure 3. On Figure 3 is drawn a curve used for calculation according to the method of V. M. Shestakov (Reference 7).

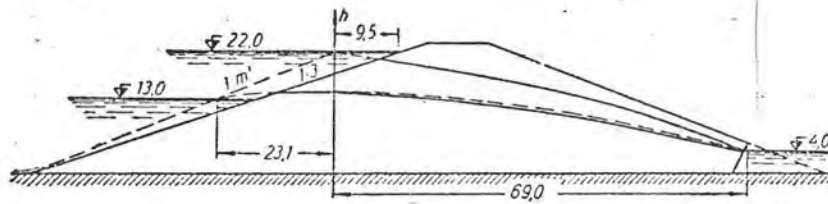


Figure 3. Computation scheme of a dam with a toe drain: — is the free surface curve according to Equation 47, the -- line is the free surface curve calculated according to the method of V. M. Shestakov.

BIBLIOGRAPHY

1. Verigin, N. N., "Groundwater Conditions for Filling and Drawing Down Reservoirs," Gidrotekh stroi, 1952, No. 11
2. Deck, G., "Manual for Practical Use of LaPlace Transforms," (Translated from the German), Izdat Navko, Moscow, 1965
3. Lykov, A. V., "Theory of Heat Transfer," Gostoptekhizdat, 1952
4. Mkhitarian, A. M., "Hydraulic Hydromechanical Computations of Seepage through Earth Dams," Kuibyshev Oblast Izdat, 1956
5. Chuiko, V. M., "Plano-parallel and Radial Problems of Unsteady Seepage, Variable Boundary Conditions," Tr Koordin, Soveshch po gidrotekhnike, No XXV, Izdat "Energia," Moscow, 1966
6. Shankin, P. A., "Calculation of Seepage in Earth Dams," Izdat Ministerstva rechnogo flota, SSSR, 1947
7. Shestakov, V. M., "Determining the Hydrodynamic Forces in Earth Structures and Slopes with a Dropping Pool Level," Sb "Vopr. fil'trats. rashetov gidrotekh. sooryzhenii," Gosstroizdat, 1950
8. Shestakov, V. M., "Methods of Determining the Capillary Part of Seepage Flow in Slopes," Izdat VodGEO, 1955

Г. Н. КОНОНЕНКО, инж.

**НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ
НЕУСТАНОВИВШЕЙСЯ ФИЛЬТРАЦИИ
В ОТКОСАХ СООРУЖЕНИЙ
С ПЕРЕМЕННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ**

В настоящее время в гидравлическом строительстве и в горном деле (при открытых разработках полезных ископаемых) находят широкое применение способы сооружения котлованов, перемычек, карьеров и др. с помощью средств гидромеханизации. После намыва перемычки или выемки грунта под основание сооружения котлован осушается, причем скорость понижения горизонта воды в нем задают исходя из фильтрационной устойчивости откосов или бортов карьеров. При этом в теле земляного сооружения образуется неустановившийся фильтрационный поток. Такой поток наблюдается в теле плотины при

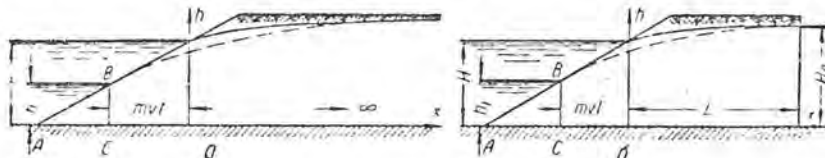


Рис. 1. Расчетные схемы фильтрационных потоков:
а — полуограниченного, б — ограниченного.

колебании горизонтов воды в бьефах, каналах оросительных систем, откосах деривационных каналов.

В задачу фильтрационного расчета входит определение количественных характеристик потока, а также динамики изменения положения кривой свободной поверхности в земляном сооружении. Количество работ, в которых рассмотрены случаи фильтрации, когда граничные условия являются функцией времени, ограничено. При этом в работах имеются различные допущения. Так, в работе [7] приведен приближенный расчет параметров для полуограниченного и ограниченного фильтрационных потоков с наклонной граничной плоскостью, где изменение уровня воды перед откосом принято линейным. При исследованиях [1] рассмотрена динамика грунтовых вод при наполнении и сработке водохранилища, изменение горизонта воды в водохранилище в этом случае аппроксимировано уравнением параболы.

В. М. Чуйко [5] рассматривает неустановившуюся фильтрацию при переменных граничных условиях для сооружений с вертикальной граничной плоскостью (траншея, вертикальный борт карьера и др.). В данной работе приведены некоторые схемы фильтрационных потоков в однородном массиве грунта с наклонной граничной плоскостью на водонепроницаемом основании (рис. 1), определено положение кривой свободной поверхности и расход на откосе при степенном законе изменения уровня воды на одной из границ потока.

Общим уравнением неустановившейся фильтрации является уравнение Буссинеска

$$\frac{k}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial h}{\partial x} \right) = \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (1)$$

где $h(x, t)$ — глубина потока; k — коэффициент фильтрации; μ — коэффициент водоотдачи грунта.

Найдем решение уравнения (1) в случае полуограниченного потока (рис. 1, а) для начального условия при $t = 0$; $h = h_0(x)$

$$h_0(x) = H^2 + \frac{2q_0}{k} x \quad (2)$$

и граничного условия при $x = -mt^\beta$; $\beta > 0$; $v > 0$

$$h(0, t) = H - vt^\beta. \quad (3)$$

Условие (3) соответствует изменению горизонта воды перед откосом по степенному закону.

Уравнение (1) нелинейное. Линеаризируя его по способу Багрова — Веригина получим уравнение типа уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (4)$$

где $u = h^2$; $a = \frac{kh_{cp}}{\mu}$; величину h_{cp} определяют по рекомендациям, изложенным в работах [1, 7]. С учетом новых краевых условий

$$\text{при } t = 0 \quad u(x, 0) = u + \frac{2q_0}{k} x; \quad (5)$$

$$\text{при } x = -mt^\beta \quad u(0, t) = (H - vt^\beta)^2. \quad (6)$$

Введем переменную

$$y = x + mt^\beta, \quad (7)$$

тогда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial u(y, t)}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u(y, t)}{\partial t}; \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \beta mt^{\beta-1} \quad (8)$$

и уравнение (4) принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \beta mt^{\beta-1} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (9)$$

причем изменяются и краевые условия:

$$\text{при } y = 0 \quad u(0, t) = u - 2 \sqrt{u} vt^\beta + v^2 t^{2\beta}; \quad (10)$$

$$\text{при } t = 0 \quad u(x, 0) = u + \frac{2q_0}{k} x. \quad (11)$$

Применим к уравнению (9) преобразование Лапласа относительно переменной t . Для этого умножим это уравнение почленно на $\exp(-st) dt$ и проинтегрируем по t в пределах от нуля до бесконечности.

Интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\partial u}{\partial t} e^{-st} dt &= u e^{-st} \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} u(y, t) e^{-st} dt = \\ &= -u(y, 0) + s \int_0^{\infty} u(y, t) e^{-st} dt. \end{aligned} \quad (12)$$

Введем обозначение

$$U(y, s) = \int_0^{\infty} u(y, t) e^{-st} dt \quad (13)$$

и будем называть $U(y, s)$ изображением функции $u(y, t)$, тогда левую часть уравнения можно переписать следующим образом:

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial u}{\partial t} e^{-st} dt = -u(y, 0) + sU(y, s). \quad (14)$$

После преобразования правой части уравнения (9) получим

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial u}{\partial y} e^{-st} dt = \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{\infty} u e^{-st} dt = \frac{\partial U(y, s)}{\partial y}; \quad (15)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} e^{-st} dt = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int_0^{\infty} u e^{-st} dt = \frac{\partial^2 U(y, s)}{\partial y^2}. \quad (16)$$

В связи с тем, что производная по t исчезла и остаются лишь производные по y , частные производные можно заменить обыкновенными. Таким образом, вместо дифференциального уравнения в частных производных [9] получим обыкновенное неоднородное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 U}{dy^2} - 2\alpha \frac{dU}{dy} = \frac{1}{a} [sU - u(y, 0)], \quad (17)$$

где

$$2\alpha = \beta \frac{mv}{a} t^{\beta-1}.$$

В результате преобразования краевых условий (10) и (11) с учетом обозначения (13)

$$U(0, s) = \frac{u}{s} - \frac{2 \sqrt{\pi} v (\beta)!}{s^{\beta+1}} + \frac{v^2 (2\beta)!}{s^{2\beta+1}}; \quad (18)$$

$$U(y, 0) = \frac{u + \frac{2q_0}{k}x}{s}. \quad (19)$$

Уравнение (17) — линейное с постоянными коэффициентами. Его характеристическим уравнением является уравнение

$$p^2 - 2\alpha p - \frac{s}{a} = 0, \quad (20)$$

корни которого равны $\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + \frac{s}{a}}$. Частным решением уравнения (17) будет

$$u^* = Ay + B. \quad (21)$$

Определив постоянные A и B , получим

$$u^* = \frac{u + \frac{2q_0}{k}x}{s} - \beta \frac{2q_0}{s^2 k} mvt^{\beta-1}. \quad (22)$$

Общее решение уравнения (17) можно выразить следующим образом:

$$U(y, s) = [c_1 e^{yv} + c_2 e^{-yv}] e^{\alpha y} + \frac{u + \frac{2q_0}{k}x}{s} - \beta \frac{2q_0}{s^2 k} mvt^{\beta-1}, \quad (23)$$

где $v = \sqrt{\alpha^2 + \frac{s}{a}}$.

Для того чтобы функция $U(y, s)$ не возрастала безгранично с увеличением y , в формуле (23) положим $c_1 = 0$. Затем, положив $y = 0$, с учетом выражения (18) получим

$$c_2 = \frac{v^2 (2\beta)!}{s^{2\beta+1}} - \frac{2 \sqrt{u} v (\beta)!}{s^{\beta+1}} + \frac{2q_0}{sk} mvt^{\beta} + \beta \frac{2q_0}{s^2 k} mvt^{\beta-1}. \quad (24)$$

Таким образом, окончательно

$$U(y, s) = \frac{u + \frac{2q_0}{k}x}{s} - \beta \frac{2q_0}{s^2 k} mvt^{\beta-1} + \left[\frac{v^2 (2\beta)!}{s^{2\beta+1}} - \frac{2 \sqrt{u} v (\beta)!}{s^{\beta+1}} + \beta \frac{2q_0}{s^2 k} mvt^{\beta-1} + \frac{2q_0}{sk} mvt^{\beta} \right] e^{y(\alpha-v)}. \quad (25)$$

На основании расчетов установлено, что при $\alpha \sqrt{at} \leq 0,5$ оригинал изображения $\frac{1}{s^n} e^{-y \sqrt{\alpha^2 + \frac{s}{a}}}$ мало зависит от величины $\alpha \sqrt{at}$, ввиду чего можно принять

$$L^{-1} \left[\frac{1}{s^n} e^{-y \sqrt{\alpha^2 + \frac{s}{a}}} \right] \approx L^{-1} \left[\frac{1}{s^n} e^{-y \sqrt{\frac{s}{a}}} \right]. \quad (26)$$

Условие $\alpha \sqrt{at} \leq 0,5$ можно заменить более простым условием

$$m^2 \frac{\mu}{k} v \leq 1.$$

Учитывая, что преобразованию $\frac{1}{s}$ соответствует единица, а $\frac{1}{s^2}$ соответствует t , вернемся по таблицам преобразований [2, 3] к функции $u(y, t)$, а затем и к функции $h(y, t)$:

$$\begin{aligned} h^2(y, t) = & H^2 + \frac{2q_0}{k} (x - mvt^\beta) + e^{\alpha y} \left\{ v^2 (2\beta)! (4t)^{2\beta} i^{4\beta} \operatorname{erfc} \frac{y}{2\sqrt{at}} - \right. \\ & - 2Hv(\beta)! (4t)^\beta i^{2\beta} \operatorname{erfc} \frac{y}{2\sqrt{at}} + \frac{2q_0}{k} mvt^\beta \left[4i^2 \operatorname{erfc} \frac{y}{2\sqrt{at}} + \right. \\ & \left. \left. + \operatorname{erfc} \frac{y}{2\sqrt{at}} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (27)$$

где

$$i^n \operatorname{erfc} u = \int_u^\infty i^{n-1} \operatorname{erfc} \xi d\xi. \quad (28)$$

Выражение (28) является интегральной функцией ошибок, общая рекуррентная формула которой будет

$$2ni^n \operatorname{erfc} u = i^{n-2} \operatorname{erfc} u - 2ni^{n-1} \operatorname{erfc} u. \quad (29)$$

Функция (28) с высокой степенью точности табулирована в исследованиях [3].

Удельный расход q_n на откосе сооружения связан с функцией $U(y, s)$ соотношением

$$\frac{q}{s} = \frac{1}{2} k \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_{y=0}. \quad (30)$$

Производную $\frac{\partial U}{\partial y}$ находим из выражения (25) и по таблицам преобразований определяем оригинал

$$\begin{aligned} q_n = & kv^2 (2\beta)! \left[\frac{\alpha t^{2\beta}}{2(2\beta)!} - \frac{2^{2\beta} t^{2\beta - \frac{1}{2}}}{2[1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (4\beta - 1)] \sqrt{\pi a}} \right] - \\ & - kHv(\beta)! \left[\frac{\alpha t^\beta}{(\beta)!} - \frac{2^\beta t^{\beta - \frac{1}{2}}}{[1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2\beta - 1)] \sqrt{\pi a}} \right] + \\ & + 2q_0 mvt^\beta \left[\frac{\alpha}{2} (1 + \beta) - \frac{0,565}{\sqrt{at}} \left(\frac{1}{2} + \beta \right) \right] + q_0. \end{aligned} \quad (31)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи изменения уровня воды перед откосом:

а) $\beta = 1$, $v = \text{const}$; это соответствует линейному закону изменения уровня воды перед откосом:

$$h^2(y, t) = H^2 + \frac{2q_0}{k} (x - mvt) + e^{dy} \left[32v^2 t^2 i^4 \operatorname{erfc} \frac{y}{2\sqrt{at}} - 8Hvt i^2 \operatorname{erfc} \frac{y}{2\sqrt{at}} + \frac{2q_0}{k} mvt \left(4i^2 \operatorname{erfc} \frac{y}{2\sqrt{at}} + \operatorname{erfc} \frac{y}{2\sqrt{at}} \right) \right], \quad (32)$$

а расход

$$q_n = k \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{0,755}{\sqrt{at}} \right) v^2 t^2 - k \left(\alpha - \frac{1,13}{\sqrt{at}} \right) Hvt + \left(\alpha - \frac{0,847}{\sqrt{at}} \right) 2q_0 mvt + q_0, \quad (33)$$

Выражение (33) можно представить в другой форме:

$$q_n = q_0 + kH\bar{q}_1, \quad (34)$$

где q_n — расход потока при выходе на откос; q_0 — расход начального установившегося течения, знак которого выбирают положительным, если оно направлено в сторону откоса и отрицательным при обратном направлении; $\bar{q}_1$ — относительный расход на откосе при падении уровня воды перед откосом.

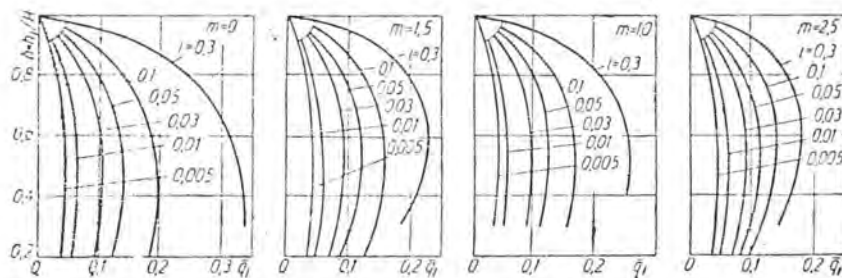


Рис. 2. Графики для определения $\bar{q}_1$.

шегося течения, знак которого выбирают положительным, если оно направлено в сторону откоса и отрицательным при обратном направлении; $\bar{q}_1$ — относительный расход на откосе при падении уровня воды перед откосом.

Для определения $\bar{q}_1$ построены графики (рис. 2) зависимости расхода от относительной величины падения уровня воды перед откосом $\delta = \frac{h_1}{H}$, а также от величины $i = \frac{\mu}{k} v$, представляющей собой произведение характеристики грунта на скорость понижения горизонта воды;

б) $\beta = 1$, $v = \text{const}$, $q_0 = 0$ и $H = h_0$ (первоначальная мощность грунтовых вод); в этом случае уровень воды в откосе

$$h^2(y, t) = h_0^2 + e^{\alpha y} \left[32v^2 t^2 \operatorname{erfc} \frac{y}{2\sqrt{at}} - 8h_0 v t^2 \operatorname{erfc} \frac{y}{2\sqrt{at}} \right], \quad (35)$$

а расход

$$q_v = k \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{0,755}{\sqrt{at}} \right) v^2 t^2 - k \left(\alpha - \frac{1,13}{\sqrt{at}} \right) h_0 v t. \quad (36)$$

Рассмотрим ограниченный поток с заданным постоянным напором на внешней границе. Расчетная схема для этого случая показана на рис. 1, б. Принимаем, что на границе $y = L_t$ глубина потока остается неизменной и равной H_0 . Тогда функция $U(y, s)$ должна удовлетворять уравнению (17), решением которого является выражение (23), а также условию на границе $y = L_t$, которое с учетом обозначений (13) можно выразить следующим образом:

$$U(L, s) = \frac{u_0}{s}. \quad (37)$$

За начальное условие принимаем уравнение (19), в котором координата y изменяется от 0 до L_t . В этом случае решение уравнения (17) имеет вид

$$U(y, s) = [A \operatorname{ch} y v + B \operatorname{sh} y v] e^{\alpha y} + \frac{u + \frac{2q_0}{k} x}{s} - \beta \frac{2q_0}{s^2 k} m v t^{\beta-1}, \quad (38)$$

где A и B — произвольные постоянные.

Полагая в уравнении (38)

$$y=0, \quad U = \frac{u}{s} - \frac{2\sqrt{u} v (\beta)!}{s^{\beta+1}} + \frac{v^2 (2\beta)!}{s^{2\beta+1}}, \quad y = L_t, \quad u = \frac{u_0}{s},$$

получим

$$A = \frac{2q_0}{sk} m v t^{\beta} + \beta \frac{2q_0}{s^2 k} m v t^{\beta-1} - \frac{2\sqrt{u} v (\beta)!}{s^{\beta+1}} + \frac{v^2 (2\beta)!}{s^{2\beta+1}}; \quad (39)$$

$$B = \frac{\left(\beta \frac{2q_0}{s^2 k} m v t^{\beta-1} - u - u_0 + \frac{2q_0}{k} L \right) e^{-\alpha L_t}}{\operatorname{sh} L_t v}$$

$$- \frac{\left[\frac{2q_0}{sk} m v t^{\beta} + \beta \frac{2q_0}{s^2 k} m v t^{\beta-1} - \frac{2\sqrt{u} v (\beta)!}{s^{\beta+1}} + \frac{v^2 (2\beta)!}{s^{2\beta+1}} \right] \operatorname{ch} L_t v}{\operatorname{sh} L_t v}. \quad (40)$$

Подставляя значения A и B в выражение (38), после соответствующих преобразований находим

$$\begin{aligned}
 U(y, s) = & e^{\alpha y} \left[\frac{2q_0}{sk} mvt^\beta + \beta \frac{2q_0}{s^2 k} mvt^{\beta-1} - \frac{2 \sqrt{u} v (\beta)!}{s^{\beta+1}} + \frac{v^2 (2\beta)!}{s^{2\beta+1}} \right] \times \\
 & \times \frac{\text{sh}(L_t - y) v}{\text{sh} L_t v} + e^{-\alpha(L_t - y)} \left[\beta \frac{2q_0}{s^2 k} mvt^{\beta-1} - \frac{u - u_0 + \frac{2q_0}{k} L}{s} \right] \times \\
 & \times \frac{\text{sh} y v}{\text{ch} L_t v} + \frac{u + \frac{2q_0}{k} x}{s} - \beta \frac{2q_0}{s^2 k} mvt^{\beta-1}. \quad (41)
 \end{aligned}$$

Для получения значения функции $h(y, t)$ из зависимости (41) выполним некоторые упрощения при малых значениях времени t . Чтобы перейти к оригиналу функции $h(y, t)$ в выражении для изображений (41), отношения гиперболических синусов удобно представить в следующей форме:

$$\begin{aligned}
 \frac{\text{sh} y v}{\text{sh} L v} = & \frac{e^{yv} (1 - e^{-2yv})}{e^{Lv} (1 - e^{-2Lv})} = e^{-(L-y)v} [1 + e^{-2Lv} + \dots - e^{-2yv} - \\
 & - e^{-2(y+L)v} + \dots] = e^{-(L-y)v} - e^{-(L+y)v} + e^{-(3L-y)v} - \\
 & - e^{-(3L+y)v} + \dots; \quad (42)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\text{sh}(L-y)v}{\text{sh} L v} = & e^{-yv} \frac{1 - e^{-2(L-y)v}}{1 - e^{-2Lv}} = e^{-yv} [1 + e^{-2Lv} + \dots - e^{-2(L-y)v} - \\
 & - e^{-2(2L-y)v} - \dots] = e^{-yv} + e^{-(2L+y)v} - e^{-2Lv} - \dots \quad (43)
 \end{aligned}$$

Сохраняя в выражениях (42) и (43) лишь первые члены рядов, перепишем равенство (41) в виде

$$\begin{aligned}
 U(y, s) = & e^{\alpha y} \left[\frac{2q_0}{sk} mvt^\beta + \beta \frac{2q_0}{s^2 k} mvt^{\beta-1} - \frac{2 \sqrt{u} v (\beta)!}{s^{\beta+1}} + \frac{v^2 (2\beta)!}{s^{2\beta+1}} \right] e^{-yv} + \\
 & + e^{-\alpha(L_t - y)} \left[\beta \frac{2q_0}{s^2 k} mvt^{\beta-1} - \frac{u - u_0 + \frac{2q_0}{k} L}{s} \right] e^{-(L_t - y)v} + \\
 & + \frac{u + \frac{2q_0}{k} x}{s} - \beta \frac{2q_0}{s^2 k} mvt^{\beta-1}. \quad (44)
 \end{aligned}$$

Применяя зависимость (26), перейдем по таблицам изображений к функции

$U(y, t)$, а затем к функции $h(y, t)$, в результате окончательно для малых значений времени t получим

$$\begin{aligned} h^2(y, t) = & H^2 + \frac{2q_0}{k} (x - mvt^\beta) + e^{\alpha y} \left\{ v^2 (2\beta)! (4t)^{2\beta} i^{4\beta} \times \right. \\ & \times \operatorname{erfc} \frac{y}{2\sqrt{at}} - 2Hv(\beta)! (4t)^{\beta} i^{2\beta} \operatorname{erfc} \frac{y}{2\sqrt{at}} + \frac{2q_0}{k} mvt^\beta \times \\ & \times \left(4i^2 \operatorname{erfc} \frac{y}{2\sqrt{at}} + \operatorname{erfc} \frac{y}{2\sqrt{at}} \right) \left. + e^{-\alpha(L_t - y)} \left\{ \frac{8q_0}{k} mvt^\beta i^2 \times \right. \right. \\ & \times \operatorname{erfc} \frac{L_t - y}{2\sqrt{at}} - \left(H^2 - H_0^2 + \frac{2q_0}{k} L \right) \operatorname{erfc} \frac{L_t - y}{2\sqrt{at}} \left. \right\} \end{aligned} \quad (45)$$

Выражение для расхода в изображениях получим, исходя из соотношения (30) с учетом перехода к оригиналу:

$$\begin{aligned} q_B = & kv^2 (2\beta)! \left[\frac{\alpha t^{2\beta}}{2(2\beta)!} - \frac{2^{2\beta} t^{2\beta - \frac{1}{2}}}{2[1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (4\beta - 1)] \sqrt{\pi a}} \right] - \\ & - kHv(\beta)! \left[\frac{\alpha t^\beta}{(\beta)!} - \frac{2^\beta t^{\beta - \frac{1}{2}}}{[1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2\beta - 1)] \sqrt{\pi a}} \right] + \\ & + ke^{-\alpha L_t} \left[\beta \frac{2q_0}{k} mvt^{\beta-1} \left(2\alpha i^2 \operatorname{erfc} \frac{L_t}{2\sqrt{at}} + \sqrt{t} i \operatorname{erfc} \frac{L_t}{2\sqrt{at}} \right) - \right. \\ & - \left(H^2 - H_0^2 + \frac{2q_0}{k} L \right) \left(\frac{\alpha}{2} \operatorname{erfc} \frac{L_t}{2\sqrt{at}} + \frac{0,28}{\sqrt{at}} e^{\frac{-L_t^2}{4at}} \right) \left. + \right. \\ & \left. + 2q_0 mvt^\beta \left[\frac{\alpha}{2} (1 + \beta) - \frac{0,565}{\sqrt{at}} \left(\frac{1}{2} + \beta \right) \right] + q_0 \right] \end{aligned} \quad (46)$$

Рассмотрим частные случаи изменения уровня воды перед откосом:

а) $\beta = 1$, $v = \text{const}$; это соответствует линейному закону изменения уровня перед откосом:

$$\begin{aligned} h^2(y, t) = & H^2 + \frac{2q_0}{k} (x - mvt) + e^{\alpha y} \left[32v^2 t^2 i^4 \operatorname{erfc} \frac{y}{2\sqrt{at}} - \right. \\ & - 8Hvt i^2 \operatorname{erfc} \frac{y}{2\sqrt{at}} + \frac{2q_0}{k} mvt \left(4i^2 \operatorname{erfc} \frac{y}{2\sqrt{at}} + \operatorname{erfc} \frac{y}{2\sqrt{at}} \right) \left. + \right. \\ & \left. + e^{-\alpha(L_t - y)} \left[\frac{8q_0}{k} mvt i^2 \operatorname{erfc} \frac{L_t - y}{2\sqrt{at}} - \left(H^2 - H_0^2 + \frac{2q_0}{k} L \right) \operatorname{erfc} \frac{L_t - y}{2\sqrt{at}} \right] \right] \end{aligned} \quad (47)$$

а расход

$$q_B = k \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{0,755}{\sqrt{at}} \right) v^2 t^2 - k \left(\alpha - \frac{1,13}{\sqrt{at}} \right) H v t + k e^{-\alpha L t} \times \\ \times \left[\frac{2q_0}{k} m v \left(2\alpha t i^2 \operatorname{erfc} \frac{L_t}{2\sqrt{at}} + \sqrt{t} i \operatorname{erfc} \frac{L_t}{2\sqrt{at}} \right) - \left(H^2 - H_0^2 + \frac{2q_0}{k} L \right) \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{\alpha}{2} \operatorname{erfc} \frac{L_t}{2\sqrt{at}} + \frac{0,28}{\sqrt{at}} e^{-\frac{L^2}{4at}} \right) + 2q_0 m v t \left(\alpha - \frac{0,847}{\sqrt{at}} \right) + q_0 \right] \quad (48)$$

б) $\beta = 1$, $v = \text{const}$; $q_0 = 0$; $H = H_0 = h_0$;

в этом случае

$$h^2(y, t) = h_0^2 + e^{\alpha y} \left[32v^2 t^2 i^2 \operatorname{erfc} \frac{y}{2\sqrt{at}} - 8h_0 v t i^2 \operatorname{erfc} \frac{y}{2\sqrt{at}} \right], \quad (49)$$

а расход

$$q_B = k \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{0,755}{\sqrt{at}} \right) v^2 t^2 - k \left(\alpha - \frac{1,13}{\sqrt{at}} \right) h_0 v t. \quad (50)$$

Из выражений (49) и (50) видно, что при малых значениях времени t влияние удаленной границы на фильтрационный процесс не сказывается, и в этом случае формулы для полуограниченного и ограниченного потоков совпадают.

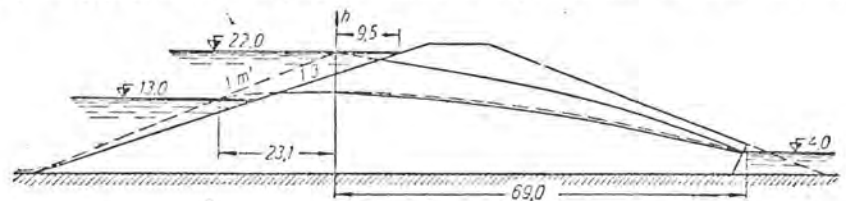


Рис. 3. Расчетная схема плотины с дренажем в нижнем бьефе: сплошная линия — кривая депрессии по уравнению (47), штриховая — кривая депрессии, рассчитанная по методике В. М. Шестакова.

Приведенные выше формулы были получены без учета сопротивления выходного клина откоса ABC (рис. 1). На основании изучения движения воды в выходном клине можно установить связь между расходом потока, проходящим через клин, и величиной участка высачивания. Рекомендации по определению высоты высачивания h_B изложены в работах [4, 6, 8].

Ниже в качестве примера дан расчет плотины с дренажем в нижнем бьефе при падении горизонта воды в водохранилище. Учет высачивания производился по упрощенной методике, изложенной в работе [7]. Согласно этой методике строят фиктивный откос с заложением m' , определяемым по формуле

$$m' = \frac{m^2}{m + 0,5}, \quad (51)$$

а расчет производят по формулам и уравнениям, составленным без учета участка высачивания. Точку высачивания находят как точку пересечения получаемой кривой депрессии с линией действительного откоса.

Расчетная схема плотины изображена на рис. 3. Уровень верхнего бьефа в течение 15 суток опускается с постоянной скоростью $v = 0,6$ м/сутки, уровень на низовой границе — постоянный. Фильтрационные свойства грунтов характеризуются соотношением $\frac{k}{\mu} = 10$ м/сутки.

Определяем параметры установившегося потока

$$m' = \frac{3^2}{3,5} = 2,57 \text{ и } \Delta L = \frac{H}{2 + \frac{1}{m}} = \frac{22}{2 + \frac{1}{3}} = 9,5 \text{ м.}$$

Приведенный расход

$$\bar{q}_0 = \frac{q_0}{k} = - \frac{H^2 - H_0^2}{2(L + \Delta L)} = \frac{22^2 - 4^2}{2 \cdot 69} = -3,4 \text{ м.}$$

Параметрами неустановившегося потока будут

$$h_{\text{ср}} = \frac{H + h_1}{2} = \frac{22 + 13}{2} = 17,5 \text{ м; } a = \frac{k}{\mu} h_{\text{ср}} = 10 \cdot 17,5 = 175 \text{ м;}$$

$$\sqrt{at} = \sqrt{175 \cdot 15} = 51,5 \text{ м; } m'vt = 2,57 \cdot 0,6 \cdot 15 = 23,1 \text{ м;}$$

$$\alpha = \frac{m'v}{2a} = \frac{2,57 \cdot 0,6}{350} = 0,0044; \quad L_t = L + m'vt = 69 + 23,1 = 92,1 \text{ м.}$$

Кривую депрессии, рассчитанную по уравнению (47), изображаем графически (рис. 3). На рис. 3 также нанесена кривая, полученная при расчете по методике В. М. Шестакова [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. В е р и г и н Н. Н., Режим грунтовых вод при наполнении и сработке водохранилищ, «Гидротехническое строительство», 1952, № 11.
2. Д е ч Г., Руководство к практическому применению преобразования Лапласа (перевод с немецкого), М., «Наука», 1965.
3. Л ы к о в А. В., Теория теплопроводности, Гостоптехиздат, 1952.
4. М х и т а р я н А. М., Гидравлично-гидромеханический расчет фильтрации через земляные плотины, Куйбышевское областное издательство, 1956.
5. Ч у й к о В. М., Плоскопараллельная и радиальная задачи неустановившейся фильтрации с переменными граничными условиями, Труды координационных совещаний по гидротехнике, вып. XXV, М., «Энергия», 1966.
6. Ш а н к и н П. А., Расчет фильтрации в земляных плотинах, Изд. Министерства речного флота СССР, 1947.
7. Ш е с т а к о в В. М., Определение гидродинамических сил в земляных сооружениях и откосах при падении уровней в бьефах, Сб. «Вопросы фильтрационных расчетов гидротехнических сооружений», М., Гостройиздат, 1956.
8. Ш е с т а к о в В. М., Методика определения участка высачивания фильтрационного потока на откос, М., Изд. ВОДГЕО, 1955.

TC

1

G453R

No. 6

C-1

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР

ГИДРАВЛИКА И ГИДРОТЕХНИКА

(РЕСПУБЛИКАНСКИЙ МЕЖВЕДОМСТВЕННЫЙ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СБОРНИК)

6

ENGLISH TABLE OF CONTENTS
ON BACK COVER

PRINTED IN THE SOVIET UNION

Издательство «Техніка»

Киев—

1968