

United States Department of the Interior
Bureau of Reclamation
Office of Chief Engineer

HYDRAULICS BRANCH
OFFICIAL FILE COPY

Translation No. 842

BUREAU OF RECLAMATION
HYDRAULIC LABORATORY

OFFICE
FILE COPY

WHEN BORROWED RETURN PROMPTLY

CALCULATING THE COEFFICIENT OF VERTICAL TURBULENT
HEAT EXCHANGE IN SEAS AND RESERVOIRS

(Raschet koeffitsientov vertikal'nogo turbulentnogo
obmena tepla v moriakh i vodokhranilishchakh)

By

E. P. Anisimova and A. A. Pivovarov

Translated from the Russian: Meteorologiya i Gidrologiya
No. 2, pp 33-38, 1966

By

D. L. King
Hydraulics Branch
Division of Research

Office of Engineering Reference
Library Branch
Denver, Colorado
July 1970

Translation No. 842

UNITED STATES
DEPARTMENT OF THE INTERIOR
BUREAU OF RECLAMATION
OFFICE OF CHIEF ENGINEER

CALCULATING THE COEFFICIENT OF VERTICAL TURBULENT
HEAT EXCHANGE IN SEAS AND RESERVOIRS

(Raschet koeffitsientov vertikal'nogo turbulentnogo
obmena tepla v moriakh i vodokhranilishchakh)

By

E. P. Anisimova and A. A. Pivovarov

Translated from the Russian: Meteorologiya i Gidrologiya
No. 2, pp 33-38, 1966

By

D. L. King
Hydraulics Branch
Division of Research

Note: This is a working translation

Office of Engineering Reference
Denver, Colorado
July 1970

ABSTRACT

Distribution of heat in reservoirs depends upon the transport of heat in turbulent eddies, in addition to convection and the absorption of solar energy. This turbulent transport is described by the coefficient of vertical turbulent heat exchange. As stated in this paper, this coefficient can be evaluated by measuring temperature variations and vertical flow velocities. However, because suitable instrumentation is not widely available, an alternative indirect method is proposed. The amplitude and phase shift of temperature oscillations are used to formulate a Fourier series for temperature variations at various depths. The influence of the volumetric absorption of solar radiation is included. Equations are presented for the prediction of temperature distribution with depth, for separate regions above and below the depth to which solar radiation penetrates.

DESCRIPTORS--/ foreign research/ hydraulics/ flow/ hydrodynamics/ seas/ turbulent flow/ reservoirs/ reservoir operation/ mathematical analysis/ solar radiation/ temperature/ stratification/ stratified flow/ thermal stratification

IDENTIFIERS--/ USSR/ F'el'dstad Method/ heat exchange/ turbulent heat exchange

CALCULATING THE COEFFICIENT OF VERTICAL TURBULENT
HEAT EXCHANGE IN SEAS AND RESERVOIRS

By

E. P. Anisimova and Candidate of Physical and
Mathematical Sciences A. A. Pivovarov

The coefficient of vertical turbulent heat exchange for natural reservoirs can be determined in two ways.

The first of these is the direct method based on simultaneous measurement of the varying temperature values and the vertical component of the flow velocity, with subsequent statistical analysis.

These direct methods permit a deeper understanding of the mechanism of turbulent exchange but require for their use special highly sensitive, low-inertia apparatus and, therefore, until now have not been widely used (References 4, 6).

The second way is the indirect method based on the use of partial solutions of the equations for turbulent transfer of heat with given initial and boundary conditions. These methods, based on measurement of the average value of the distribution of temperature with depth and its changes with time, have obtained wide use in calculating the coefficient of vertical turbulent heat exchange in seas and oceans and makes it possible to explain the number of consistencies in its fluctuations (References 1, 2, 7).

F'el'dstad's Method (References 5, 7), of all the exceedingly numerous variances of the indirect method, seems to us to be more promising for computing the coefficient of vertical turbulent heat exchange K .

The basic principle of the F'el'dstad method is the assumption that the propagation of heat in reservoirs proceeds only along the vertical and occurs only by vertical heat convection. As opposed to this, we consider that the diffusion of heat is caused both by vertical turbulent flow and by the flow of radiant energy penetrating to some depth.

If the penetrating solar radiation is absorbed by the water in agreement with Reference 3, then taking the equation:

$$I(z, \tau) = \frac{1-A}{c\rho} I_0(\tau) \sum_{m=1}^N I_m e^{-\beta_m z} \quad (1)$$

and considering the coefficient of turbulent exchange to be constant with time, the basic equation for diffusion of heat along the vertical is written in the form:

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K(z) \frac{\partial t}{\partial z} \right] + \frac{1-A}{c\rho} I_0(\tau) \sum_{m=1}^{\infty} I_m \beta_m e^{-\beta_m z} \quad (2)$$

Here c , ρ , and t are the heat capacity, density, and temperature of the water respectively, τ is time, A is the albedo of the water surface, I_m and β_m are the relative portion and coefficient of attenuation of the part of the spectrum of the decreasing $I_0(\tau)$ of the total solar radiation. The initial coordinates are located on the water surface and the axis Z is directed vertically downward.

Let us express the temperature change at any depth as the sum of the steady periodic variations:

$$\begin{aligned} t(z, \tau) &= \sum_{n=1}^N [A_n^{(1)}(z) \cos n \omega \tau + A_n^{(2)}(z) \sin n \omega \tau] = \\ &= \sum_{n=1}^N A_n(z) \cos [n \omega \tau - \varphi_n(z)]. \end{aligned} \quad (3)$$

$A_n(z)$ and $\phi_n(z)$ are the amplitude and phase shift of the temperature oscillations determined from the relationships:

$$A_n(z) = \sqrt{[A_n^{[1]}(z)]^2 + [A_n^{[2]}(z)]^2}; \quad \varphi_n = \arctg \frac{A_n^{[2]}}{A_n^{[1]}}.$$

Similarly, we represent the change with time of the flow of the decreasing radiation in the form of a Fourier series with the same number of members, i.e.:

$$\frac{1-A}{c\rho} I_0(\tau) = \sum_{n=1}^N [B_n^{[1]} \cos n \omega \tau + B_n^{[2]} \sin n \omega \tau], \quad (4)$$

where

$$B_n^{[1]} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1-A}{c\rho} I_0(\tau) \cos \frac{2\pi n}{T} \tau d\tau;$$

$$B_n^{[2]} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1-A}{c\rho} I_0(\tau) \sin \frac{2\pi n}{T} \tau d\tau.$$

Here T is the period of the temperature oscillations.

Let us substitute the assumed form of solution (3) and expression (4) in equation (2). After simple transforms, equating to zero the coefficients for the conditions $\cos n\omega t$ and $\sin n\omega t$ we obtain:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dz} \left[K A_n \frac{d\varphi_n}{dz} \right] + K \frac{dA_n}{dz} \cdot \frac{d\varphi_n}{dz} + n \omega A_n = \\ & = \sin \varphi_n \sum_{m=1}^{\nu} \beta_m I_m B_n^{[1]} e^{-\beta_m z} - \cos \varphi_n \sum_{m=1}^{\nu} \beta_m I_m B_n^{[2]} e^{-\beta_m z}; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & K A_n \frac{d\varphi_n}{dz} - \frac{d}{dz} K \frac{dA_n}{dz} = \cos \varphi_n \sum_{m=1}^{\nu} \beta_m I_m B_n^{[1]} e^{-\beta_m z} + \\ & + \sin \varphi_n \sum_{m=1}^{\nu} \beta_m I_m B_n^{[2]} e^{-\beta_m z}. \end{aligned} \quad (6)$$

Multiplying both parts of these equations by A_n we will write them in the form:

$$\frac{d}{dz} \left[K A_n^2 \frac{d\varphi_n}{dz} \right] + n \omega A_n^2 = S_{n, m}^{(1)}(z); \quad (7)$$

$$K A_n^2 \left(\frac{d\varphi_n}{dz} \right)^2 - A_n \frac{d}{dz} K \frac{dA_n}{dz} = S_{n, m}^{(2)}(z). \quad (8)$$

$$S_{n,m}^{(1)}(z) = [A_n^{(2)}(z) B_n^{(1)} - A_n^{(1)}(z) B_n^{(2)}] \sum_{m=1}^{\infty} I_m \beta_m e^{-\beta_m z}; \quad (9)$$

$$S_{n,m}^{(2)}(z) = [A_n^{(1)}(z) B_n^{(1)} + A_n^{(2)}(z) B_n^{(2)}] \sum_{m=1}^{\infty} I_m \beta_m e^{-\beta_m z}. \quad (10)$$

The resulting equations (7) and (8) differ from the analogous system of F'el'dstad in the presence of the right hand parts $S_{n,m}^{(1)}$ and $S_{n,m}^{(2)}$, showing the influence of the volumetric absorption of solar radiation by the water.

Let us proceed to the method of determining the coefficient of turbulent exchange on the basis of (7) and (8). Without any additional assumptions about the form of $K(z)$ or about the distribution of the amplitudes and phase of the temperature oscillations, only equation (7) can be integrated directly. Integrating within the limits of the layer from z_1 to z_2 we obtain:

$$K(z_1) = K(z_2) \frac{\left[A_n^2 \frac{d\varphi_n}{dz} \right]_{z_2}}{\left[A_n^2 \frac{d\varphi_n}{dz} \right]_{z_1}} + \frac{\int_{z_1}^{z_2} [n \omega A_n^2 - S_{n,m}^{(1)}(z)] dz}{\left[A_n^2 \frac{d\varphi_n}{dz} \right]_{z_1}}. \quad (11)$$

where

Equation 11 does not permit determination of a single value of $K(z_1)$ if the value of $K(z_2)$ is unknown. As in F'el'dstad's method, a single value solution may be obtained only if it is assumed that at some depth $z_1 = h$, the amplitude of the temperature oscillation $A_n = 0$. In this case, the first term in the right side of equation (11), for fixing the depth of $z_2 = h$, is expressed as 0 and the value of $K(z_1)$ becomes a single-valued function of depth.

However, insertion of the fixed depth $z_2 = h$, by which $A_n(h) = 0$, essentially limits the field of use of this method to depths significantly less than h . Thus as seen from (11), at the depth $z \rightarrow h$, the value of the coefficient of turbulent exchange tends to zero independently of its true value $K(h)$ at this depth. To prevent this error, it is necessary to determine the value $K(z_2)$ by some other independent method and to make supplementary assumptions concerning the character of the changes $K(z)$ in the layer (z_1, z_2) . In the first approximation, it is possible to state (Reference 5) that within the limits of a comparatively thin layer, $K(z) = \text{a constant}$.

Then Equation 11 takes the form:

$$K_{z_1, z_2} = \frac{\int_{z_2}^{z_1} [n \omega A_n^2 - S_{n,m}^{(1)}(z)] dz}{\left[A_n^2 \frac{d\varphi_n}{dz} \right]_{z_2} - \left[A_n^2 \frac{d\varphi_n}{dz} \right]_{z_1}} \quad (12)$$

With $S_{n,m}(1)(z) \rightarrow 0$ this equation becomes identical to the corresponding formula from Reference 5. With the same assumption of a constant K within a thin layer, it is possible to obtain a second calculation formula for determining the coefficient of exchange on the basis of equation (8), specifically:

$$K_{z_1, z_2} = \frac{S_{n,m}^{(2)}(z)}{A_n^2 \left(\frac{d\varphi_n}{dz} \right)^2 - A_n \frac{d^2 A_n}{dz^2}} \quad (13)$$

The approximate coincidence of the values of K may be obtained by substituting the values z_1 and z_2 in the right side of equation (13) and can serve as a criterion for selecting the thickness of the layer (z_1, z_2) .

Calculation of K by equations (11) and (13) in the general case requires the use of the amplitude A_n and phase shift φ_n of the temperature oscillations. For the deep layers where the volumetric absorption of radiation becomes insignificant, $K(z)$ can be defined only by the distribution of the amplitudes of the temperature oscillations. Actually, in this case, it is possible to neglect the values $S_{n,m}(1)(z)$ and $S_{n,m}(2)(z)$. In the assumption, K is constant within the confines of the layer (z_1, z_2) , and equation (8) gives a ratio between the changes in amplitudes according to depth and the phase shift of the temperature oscillations. Using these condi-

tions, it is possible to write a definitive formula for layers where the absorption of radiation is insignificant, as follows:

$$K_{z_1, z_2} = \frac{n \omega \int_{z_2}^{z_1} A_n^2 dz}{A_n \sqrt{A_n \frac{d^2 A_n}{dz^2}} \Big|_{z_2} - A_n \sqrt{A_n \frac{d^2 A_n}{dz^2}} \Big|_{z_1}} \quad (11)$$

Thus equations (11) through (14) permit various methods of calculating the full range of changes in the coefficient of turbulent exchange with depth.

As an example, let us calculate $K(z)$ for Uchinsk Reservoir (Moscow Oblast) using the results of observations for the daily range of water temperatures and the penetrating solar radiation obtained for the summer of 1963. Observations of water temperature and measurements of radiation penetrating to different depths were carried out from a float fixed at a depth of 11 m approximately 200 m from the shore. Observations on August 2 and 3, made when there were no clouds or waves, were selected for calculating $K(z)$, allowing for volumetric absorption of the solar radiation.

Daily ranges of temperatures and solar radiation penetrating to various depths are shown on Figures 1 and 2. On the first of these, we see that the data from observation of temperature at all depths is approximated sufficiently well by 1 to 2 harmonics of a Fourier series. The daily range is clearly expressed for all depths, and the amplitudes of the temperature oscillations decrease regularly with depth.

The observed data testified to the fixed character of the temperature oscillations and to the determining influence of the vertical heat exchange, i.e., the main premises of the method of determining $K(z)$ correspond to actual conditions.

Figure 3 shows the range with depth of the amplitudes and phase shift of the temperature oscillations. In this figure we see that the change in the phase shift with depth in the given case can be assumed as linear. This change in the amplitude of the temperature oscillations for depths less than 0.2 m has an exponential character.

$K(z)$ is computed according to formulas (11) and (12). The value $K(z)$ computed from formula (12) without calculating the effects of

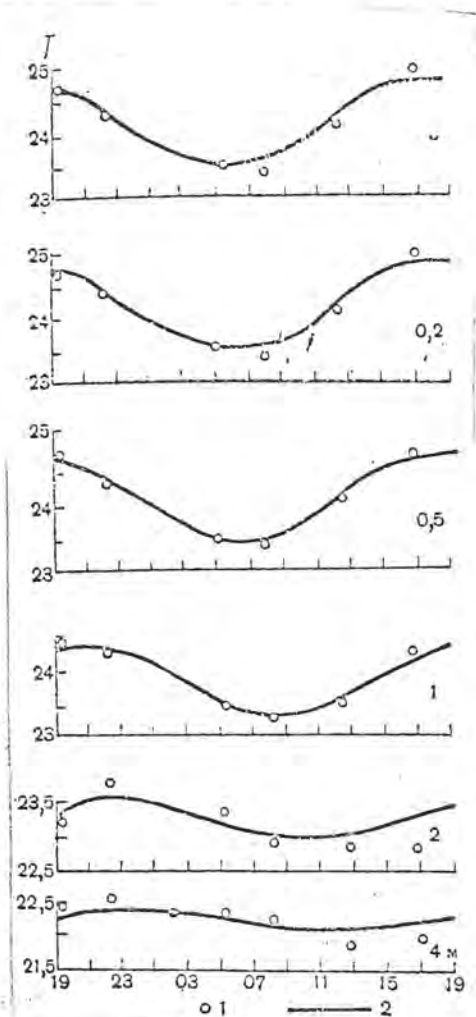


Figure 1. - Diurnal temperature chart for different depths (0-4 m) of Uchinsk Reservoir: 1 - Observed data; 2 - Approximations by a Fourier series with two members. (Temperature vs. hours)

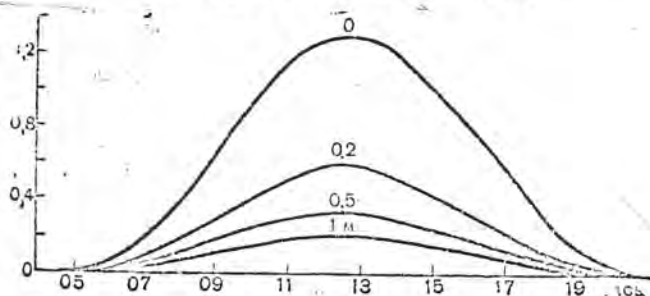


Figure 2. - Diurnal chart of total solar radiation penetrating the water to different depths (0-1 m). ($\text{Cal/cm}^2 \text{ min}$ vs. hr).

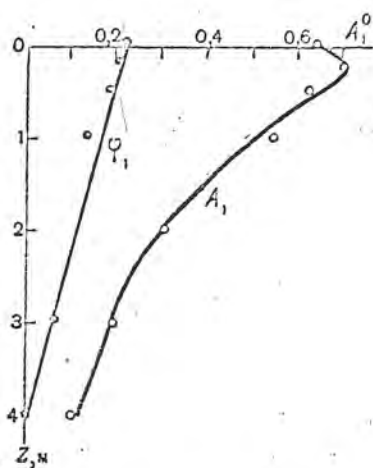


Figure 3. - Change with depth of amplitude A_1 and shift of Phase 1 of the first harmonic of temperature variations.

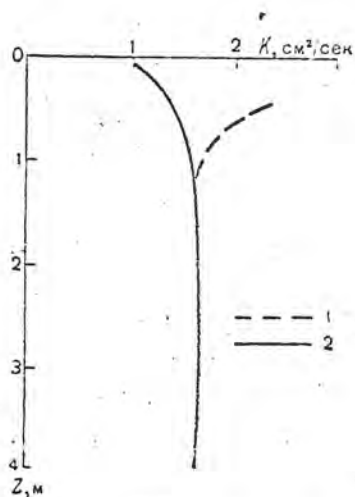


Figure 4. - Change with depth of coefficient of vertical turbulent heat exchange: 1 - According to formula (12); 2 - According to formula (11).

volumetric absorption of solar radiation, i.e., for $S_{n,m}(z) \rightarrow 0$ for depths greater than 0.2 m, is shown on Figure 4 by the dashed line. The value of K in the layer 0-0.2 m is negative and equal to minus 1.7. Starting with the depth of 1 m, K becomes nearly constant.

On the same Figure 4 are expressed values of $K(z)$ obtained from formula (11), taking into consideration the influence of the penetrating radiation (the value of K in the layer 4-5 m is assumed equal to $1.66 \text{ cm}^2/\text{sec}$ from the data calculated by formula (12). Thus, in the layer 0-0.2 m, the value of K becomes positive. At a depth of 0.5 m, consideration of the volumetric absorption of solar radiation leads to a decrease in the value of K and the maximum disappears. At a depth of only 1 m, the radiation term in the expression for K no longer has a practical effect on the value of the coefficient of exchange.

Thus, considering the influence of the volumetric absorption of penetrating solar radiation, qualitatively changes the range of the coefficient of exchange with depth and makes it physically more trustworthy, which testifies to the necessity of considering volumetric absorption when calculating $K(z)$ in the surface layers of the reservoir. Below this layer, formulas (11) and (12) give identical results.

To verify the applicability of formulas (12) and (14) or calculation for depths where the absorption of radiation has become negligible, computations were made from the observation data from August 2 and 3, August 3 and 4, and August 21 and 22. The results of these calculations are given in Table 1. The first line gives the values of $K(z)$ calculated from formula (12) for linear changes in the phase shift of the temperature oscillations with depth, shown on Figure 3, and the values of $K(z)$ from formula (14) with an approximation of the function A_n given as $A_n = 0.82e^{-0.514z}$. The results show good agreement with the value of K computed by the different methods. The two lower lines of Table 1 were calculated by formula (14). In both these cases, the phase changes with depth were not linear and the calculated K was obtained only from the amplitudes of the temperature oscillations.

The data from the calculations showed that beginning with a depth of 1.5 m, the coefficient of exchange $K(z)$ can be considered for all practical matters to be constant and equal to 1 to 1.5 cm^2/sec . In the upper layer, the values of the coefficient of heat exchange are less at the surface.

Table 1

Value of K (cm^2/sec)

Date	As calculated by formula	Depth, m							
		1	2	3	4	5	6	7	8
Aug 2- 3	(12)	1.60	1.50	1.65	1.60	-	-	-	-
	(14)	1.50	1.50	1.55	1.55	-	-	-	-
Aug 3- 4	(14)	-	0.90	0.95	0.95	0.90	-	-	-
Aug 21-22	(14)	0.65	1.35	1.35	1.35	1.35	1.35	1.30	1.35

BIBLIOGRAPHY

1. Boguslavskii, S. G., "Annual Range of the Coefficient of Turbulent Heat Transfer in the Sea," Trudy MGI, AN SSSR, Vol. XIII, 1958.
2. Ivanova, Z. S., "Influence of Changes in the Coefficient of Turbulent Exchange on Vertical Heat Diffusion in the Sea," Ibid, 1958
3. Kolesnikov, A. G., "Computation of Daily Ranges of Temperature in the Sea by a Heat Balance on the Surface," AN SSR, Ser. geofiz No. 2, 1954
4. Kolesnikov, A. G., "Several Results of Direct Determination of the Intensive Vertical Turbulent Exchange in the Sea," Sb. "Nekotorye problemy i rezultaty okeanologicheskikh issledovaniy," 1959
5. Pivovarov, A. A., "Determination of the Coefficient of Vertical Turbulent Heat Diffusion in the Sea," Trudy MGI AN SSSR, Vol. IV, 1954
6. Speranskaya, A. A., "Investigation of Turbulence in Low Flow - Through Reservoirs," Trudy III Vsesoiuz gidrologich. s'ezda, Vol. IV, 1959
7. Shtokman, V. B., "Vertical Heat Diffusion in Seas and Indirect Methods of Determining the Coefficient of Heat Transfer," Trudy Inst. Okeanologii, AN SSSR, Vol. I, 1946

ние нижнего слоя воздуха, или оба этих процесса одновременно. Туман образовался при небольшом дополнительном увлажнении на взлетно-посадочной полосе под действием газов двигателей самолета, как известно, богатых водяным паром и ядрами конденсации. Помог и ветер, дувший вдоль полосы. Поэтому туман, возникший в 3 час. 15 мин. на ВПП аэропорта Толмачево в виде узкой ленты, продержался дольше, чем туманы, возникавшие дважды ранее при взлете двух других самолетов.

Новосибирский аэрометеорологический центр

Поступила
14 IV 1965

Calculating the coefficient of vertical turbulent heat exchange in seas and reservoirs.

Расчет коэффициентов вертикального турбулентного обмена тепла в морях и водохранилищах

Е. П. Анисимова, канд. физ.-мат. наук А. А. Пивоваров

This article

has been translated into

English. JPRS 34716

УДК 551.465.41

Определение коэффициента вертикального турбулентного обмена тепла для природных водоемов может проводиться двумя путями.

Первый из них — это прямые методы, основанные на одновременном измерении пульсационных величин температуры и вертикальной составляющей скорости течения с последующей статистической обработкой. Эти методы, позволяя глубже понять механизм турбулентного обмена, требуют для своего применения специальной высокочувствительной малоинерционной аппаратуры и потому до настоящего времени не получили широкого распространения [1, 6].

Второй путь — это косвенные методы, основанные на использовании частных решений уравнения турбулентного переноса тепла при заданных начальных и граничных условиях. Эти методы, базирующиеся на измерении средних значений распределения температуры с глубиной и хода ее по времени, получили широкое распространение в расчетах коэффициентов вертикального турбулентного обмена тепла в морях и океанах и позволили выявить ряд закономерностей его изменения [1, 2, 7].

Для расчета коэффициента вертикального турбулентного обмена тепла K из весьма многочисленных вариантов косвенных методов нам представляется более перспективным метод Фельдстада [5, 7].

Основной метод Фельдстада является предположение, что распространение тепла в водоеме происходит лишь по вертикали и осуществляется только турбулентной теплопроводностью. В отличие от этого мы будем считать, что распространение тепла обусловлено как вертикальным турбулентным потоком, так и потоком лучистой энергии, проникающим до некоторой глубины.

Если для поглощения водой проникающей солнечной радиации, согласно работе [3], принять выражение

$$I(z, \tau) = \frac{1-A}{c\rho} I_0(\tau) \sum_{m=1}^{\infty} I_m e^{-\beta_m^2 z^2} \quad (1)$$

и считать коэффициент турбулентного обмена постоянным во времени, то основное уравнение распространения тепла по вертикали запишется в виде

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K(z) \frac{\partial t}{\partial z} \right] + \frac{1-A}{c\rho} I_0(\tau) \sum_{m=1}^{\infty} I_m \beta_m^2 e^{-\beta_m^2 z^2} \quad (2)$$

Здесь c , ρ , t — теплоемкость, плотность и температура воды, τ — время, A — альбедо водной поверхности, I_m и β_m — относительная доля и коэффициент ослабления m -го участка спектра падающей $I_0(\tau)$ суммарной солнечной радиации. Начало координат расположено на поверхности воды, ось Z направлена вертикально вниз.

Представим ход температуры на любой глубине в виде суммы установившихся

периодических колебаний, т. е.

$$\begin{aligned} t(z, \tau) &= \sum_{n=1}^N [A_n^{(1)}(z) \cos n \omega \tau + A_n^{(2)}(z) \sin n \omega \tau] = \\ &= \sum_{n=1}^N A_n(z) \cos [n \omega \tau - \varphi_n(z)]. \end{aligned} \quad (3)$$

$A_n(z)$ и $\varphi_n(z)$ — амплитуда и сдвиг фаз температурных колебаний определяются соотношениями

$$A_n(z) = \sqrt{[A_n^{(1)}(z)]^2 + [A_n^{(2)}(z)]^2}; \quad \varphi_n = \arctg \frac{A_n^{(2)}}{A_n^{(1)}}.$$

Аналогично представим ход во времени потока падающей суммарной радиации в виде ряда Фурье с тем же числом членов, т. е.

$$\frac{1-A}{c\rho} I_0(\tau) = \sum_{n=1}^N [B_n^{(1)} \cos n \omega \tau + B_n^{(2)} \sin n \omega \tau], \quad (4)$$

где

$$B_n^{(1)} = -\frac{1}{T} \int_0^T \frac{1-A}{c\rho} I_0(\tau) \cos \frac{2\pi n}{T} \tau d\tau;$$

$$B_n^{(2)} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1-A}{c\rho} I_0(\tau) \sin \frac{2\pi n}{T} \tau d\tau,$$

здесь T — период температурных колебаний.

Подставим предполагаемую форму решения (3) и выражение (4) в уравнение (2). После несложных преобразований, приравняв нулю коэффициенты при $\cos n \omega \tau$ и $\sin n \omega \tau$, получим

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dz} \left[K A_n \frac{d\varphi_n}{dz} \right] + K \frac{dA_n}{dz} \cdot \frac{d\varphi_n}{dz} + n \omega A_n = \\ &= \sin \varphi_n \sum_{m=1}^N \beta_m I_m B_n^{(1)} e^{-\beta_m z} - \cos \varphi_n \sum_{m=1}^N \beta_m I_m B_n^{(2)} e^{-\beta_m z}; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} &K A_n \frac{d\varphi_n}{dz} - \frac{d}{dz} K \frac{dA_n}{dz} = \cos \varphi_n \sum_{m=1}^N \beta_m I_m B_n^{(1)} e^{-\beta_m z} + \\ &+ \sin \varphi_n \sum_{m=1}^N \beta_m I_m B_n^{(2)} e^{-\beta_m z}. \end{aligned} \quad (6)$$

Умножив обе части этих равенств на A_n запишем их в виде

$$-\frac{d}{dz} \left[K A_n^2 \frac{d\varphi_n}{dz} \right] + n \omega A_n^2 = S_{n,m}^{(1)}(z); \quad (7)$$

$$K A_n^2 \left(\frac{d\varphi_n}{dz} \right)^2 - A_n \frac{d}{dz} K \frac{dA_n}{dz} = S_{n,m}^{(2)}(z), \quad (8)$$

где

$$S_{n,m}^{(1)}(z) = [A_n^{(2)}(z) B_n^{(1)} - A_n^{(1)}(z) B_n^{(2)}] \sum_{m=1}^{\infty} I_m \beta_m e^{-\beta_m z}; \quad (9)$$

$$S_{n,m}^{(2)}(z) = [A_n^{(1)}(z) B_n^{(1)} + A_n^{(2)}(z) B_n^{(2)}] \sum_{m=1}^{\infty} I_m \beta_m e^{-\beta_m z}. \quad (10)$$

Полученные уравнения (7) и (8) отличаются от аналогичной системы Фьельдстада наличием правых частей $S_{n,m}^{(1)}$ и $S_{n,m}^{(2)}$ отражающих влияние объемного поглощения солнечной радиации водой.

Перейдем к методу определения коэффициента турбулентного обмена на основании (7) и (8). Без каких-либо дополнительных предположений о виде $K(z)$ или о распределении амплитуд и фаз температурных колебаний можно непосредственно проинтегрировать лишь уравнение (7). Выполняя такое интегрирование в пределах слоя от z_1 до z_2 найдем

$$K(z_1) - K(z_2) = \frac{\left[A_n^2 \frac{d\varphi_n}{dz} \right]_{z_2}}{\left[A_n^2 \frac{d\varphi_n}{dz} \right]_{z_1}} + \frac{\int_{z_1}^{z_2} [n \omega A_n^2 - S_{n,m}^{(1)}(z)] dz}{\left[A_n^2 \frac{d\varphi_n}{dz} \right]_{z_1}}. \quad (11)$$

Уравнение (11) не позволяет однозначно определить значение $K(z_1)$, если неизвестно значение $K(z_2)$. Как и в методе Фьельдстада однозначное решение можно получить, если предположить, что на некоторой глубине $z_1=h$ амплитуда температурных колебаний $A_n=0$. В этом случае первое слагаемое в правой части (11), при фиксированной глубине $z_2=h$ обращается в нуль и величина $K(z_1)$ становится однозначной функцией глубины.

Однако введение фиксированной глубины $z_2=h$ на которой $A_n(h)=0$, существенно ограничивает область применения этого метода глубинами, значительно меньшими h . При этом, как видно из (11), на глубинах $z \rightarrow h$ величина коэффициента турбулентного обмена стремится к нулю независимо от ее истинного значения $K(h)$ на этой глубине. Для исключения этой ошибки необходимо определить значение $K(z_2)$ каким-либо другим независимым способом либо принять дополнительное предположение о характере изменения $K(z)$ в слое (z_1, z_2) . В первом приближении можно положить [5], что в пределах сравнительно тонкого слоя $K(z)=\text{const}$. Тогда выражение (11) принимает

вид

$$K_{z_1, z_2} = \frac{\int_{z_2}^{z_1} [n \omega A_n^2 - S_{n,m}^{(1)}(z)] dz}{\left[A_n^2 \frac{d\varphi_n}{dz} \right]_{z_2} - \left[A_n^2 \frac{d\varphi_n}{dz} \right]_{z_1}} \quad (12)$$

При $S_{n,m}^{(1)}(z) \rightarrow 0$ это выражение становится тождественным соответствующей формуле из работы [5].

В том же предположении постоянства K в пределах тонкого слоя можно получить вторую расчетную формулу для определения коэффициента обмена на основе уравнения (8), а именно:

$$K_{z_1, z_2} = \frac{S_{n,m}^{(2)}(z)}{A_n^2 \left(\frac{d\varphi_n}{dz} \right)^2 - A_n \frac{d^2 A_n}{dz^2}} \quad (13)$$

В качестве критерия для выбора толщины слоя (z_1, z_2) и применимости этой расчетной формулы может служить близкое совпадение величин K , получаемых при подстановке в правую часть (13) значений z_1 и z_2 .

Расчет K по уравнениям (11) и (13) в общем случае требует использования амплитуд A_n и сдвига фаз φ_n температурных колебаний. Для глубоких слоев, где объемное поглощение радиации становится мало существенным, для вычисления $K(z)$ можно ограничиться только распределением амплитуд температурных колебаний. Действительно, в этом случае можно пренебречь величинами $S_{n,m}^{(1)}(z)$ и $S_{n,m}^{(2)}(z)$. В предположении $K = \text{const}$ в пределах слоя (z_1, z_2) уравнение (8) дает соотношение между изменением по глубине амплитуды и сдвига фаз температурных колебаний. Используя эти условия, окончательную расчетную формулу для слоев, где поглощение радиации несущественно, можно записать в виде

$$K_{z_1, z_2} = \frac{n \omega \int_{z_2}^{z_1} A_n^2 dz}{A_n \sqrt{A_n \frac{d^2 A_n}{dz^2}} \Big|_{z_2} - A_n \sqrt{A_n \frac{d^2 A_n}{dz^2}} \Big|_{z_1}} \quad (14)$$

Таким образом, выражения (11) — (14) позволяют различными способами рассчитывать полный ход изменения коэффициента турбулентного обмена с глубиной.

В виде примера проведем расчет $K(z)$ для Учинского водохранилища (Московская область), используя результаты наблюдений над суточным ходом температуры воды и проникающей солнечной радиацией, полученные летом 1963 г. Наблюдения над температурой воды и измерения радиации, проникающей на различные глубины, производились с понтона, установленного на глубине 11 м примерно в 200 м от берега. Для вычисления $K(z)$ с учетом объемного поглощения солнечной радиации были выбраны наблюдения за 2—3 августа, выполненные при безоблачном небе и отсутствии волнения.

Суточный ход температуры и проникающей на различные глубины солнечной радиации представлен на рис. 1 и 2. На первом из них видно, что данные наблюдений температуры на всех глубинах достаточно хорошо аппроксимируется одной-двумя гармониками ряда Фурье. Суточный ход ясно выражен на всех глубинах, амплитуда температурных колебаний закономерно убывает с глубиной.

Данные наблюдений свидетельствуют об установившемся характере температурных колебаний, об определяющем влиянии вертикального обмена тепла, т. е. основные предпосылки метода определения $K(z)$ соответствуют действительности.

На рис. 3 изображен ход с глубиной амплитуды и сдвига фаз температурных колебаний. На этом рисунке видно, что изменение сдвига фаз с глубиной в данном случае можно считать линейным. Изменение же амплитуды температурных колебаний с глубиной ниже 0,2 м имеет экспоненциальный характер.

Расчет $K(z)$ выполнялся по формулам (11) и (12). Значения $K(z)$, рассчитанные по формуле (12) без учета влияния, объемного поглощения солнечной радиации, т. е.

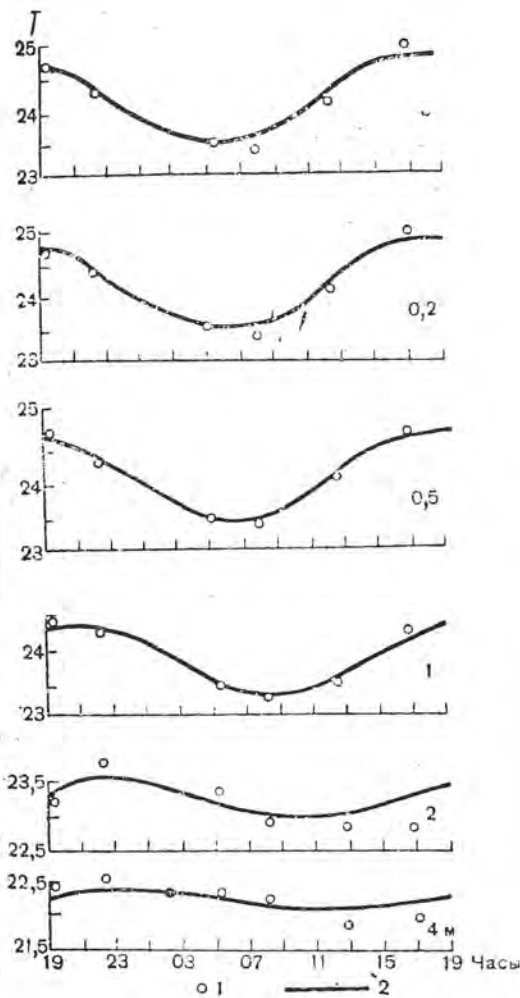


Рис. 1. Суточный ход температуры на различных глубинах [0—4 м] Ужичского водохранилища. 1—данные наблюдений, 2—аппроксимация рядом Фурье с двумя членами.

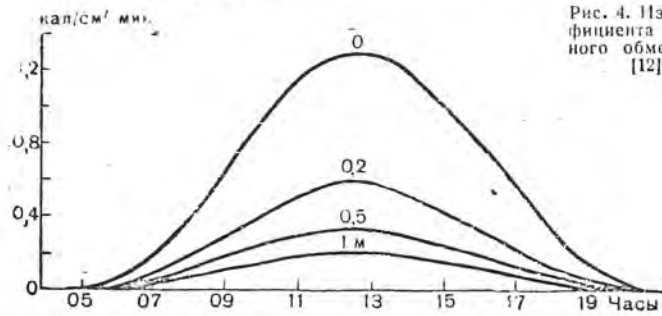


Рис. 2. Суточный ход проникающей в воду на различные глубины [0—1 м] суммарной солнечной радиации.

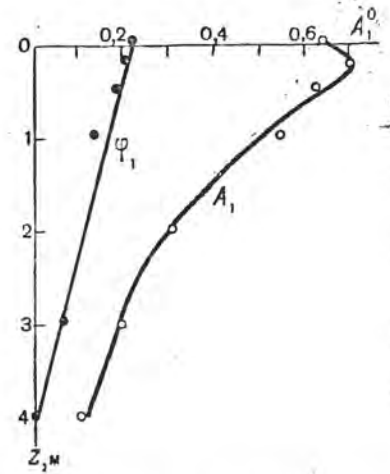


Рис. 3. Изменение с глубиной амплитуды A_1 и сдвига фаз φ_1 первой гармоники температурных колебаний.

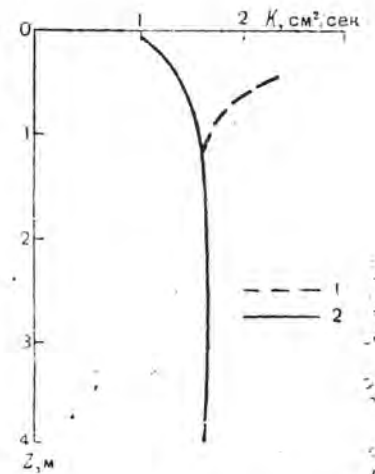


Рис. 4. Изменение с глубиной коэффициента вертикального турбулентного обмена тепла: 1—по формуле [12], 2—по формуле [11].

при $S_{n,m}^{(1)}(z) \rightarrow 0$ для глубин больше 0,2 м представлены на рис. 4 пунктирной кривой. В слое 0—0,2 м значение K получается отрицательным и равным —1,7. Начиная с глубины 1 м K становится почти постоянным.

На том же рис. 4 нанесены значения $K(z)$, полученные по формуле (11) с учетом влияния проникающей радиации [значение K в слое 4—5 м принято равным 1,66 см²/сек из данных расчета по формуле (12)]. При этом в слое 0—0,2 м значение K становится положительным. На глубине 0,5 м учет объемного поглощения солнечной радиации ведет к уменьшению значения K и максимум пропадает. На глубине же 1 м радиационный член в выражении для K уже практически не сказывается на величине коэффициента обмена.

Таким образом, учет влияния объемного поглощения проникающей солнечной радиации качественно меняет ход коэффициента обмена с глубиной, делает его физически более достоверным, что свидетельствует о необходимости учета объемного поглощения при расчетах $K(z)$ в верхнем слое водоема. Ниже этого слоя формулы (11) и (12) дают одинаковые результаты.

Для проверки применимости расчетных формул (12) и (14) для глубин, где поглощение радиации становится незначительным, были выполнены расчеты по данным наблюдений 2—3 августа, 3—4 августа и 21—22 августа. Результаты этих расчетов представлены в табл. 1.

Таблица 1

Значения K (см²/сек)

Дата	Расчетная формула	Глубина, м							
		1	2	3	4	5	6	7	8
2—3.VIII	(12)	1,60	1,50	1,65	1,60	—	—	—	—
	(14)	1,50	1,50	1,55	1,55	—	—	—	—
3—4.VIII	(14)	—	0,90	0,95	0,95	0,90	—	—	—
21—22.VIII	(14)	0,65	1,35	1,35	1,35	1,35	1,35	1,30	1,35

В первой строке даны значения $K(z)$, рассчитанные по формуле (12) при линейном изменении сдвига фаз температурных колебаний с глубиной, представленном на рис. 3, и значения $K(z)$ по формуле (14) при аппроксимации A_n функцией вида $A_n = 0,82 e^{-0,514 z}$. Результаты расчетов показывают хорошую согласованность значений K , вычисленных различными способами. Две последние строки табл. 1 рассчитаны по формуле (14). В обоих этих случаях изменение фазы с глубиной не являлось линейным и расчет K проводился только по амплитудам температурных колебаний.

Данные расчетов показывают, что начиная с глубины 1,5 м коэффициент обмена $K(z)$ можно считать практически постоянным и равным 1—1,5 см²/сек. В верхнем слое значения коэффициента обмена тепла уменьшаются к поверхности.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Богуславский С. Г. Годовой ход коэффициента турбулентной теплопроводности по вертикали в море. Тр. МГИ АН СССР, т. XIII, 1958. — [2] Иванова З. С. Влияние изменения коэффициента турбулентного обмена на распространение температурных волн по вертикали в море. Тр. МГИ АН СССР, т. XIII, 1958. — [3] Колесников А. Г. Вычисление суточного хода температуры моря по тепловому балансу на его поверхности. Изв. АН СССР, сер. геофиз. № 2, 1954. — [4] Колесников А. Г. Некоторые результаты прямого определения интенсивности вертикального турбулентного обмена в море. Сб. «Некоторые проблемы и результаты океанологических исследований», 1959. — [5] Пивоваров А. А. Определение коэффициента турбулентной теплопроводности по вертикали в море. Тр. МГИ АН СССР, т. 4, 1954. — [6] Сперанская А. А. Исследование турбулентности малопроточных водохранилищ. Тр. 3-го Всесоюзного гидрологического съезда, т. IV, 1959. — [7] Штокман В. Б. Вертикальное распространение тепловых волн в море и косвенные методы определения коэффициента теплопроводности. Тр. Ин-та океанологии АН СССР, т. 1, 1946.